FABER-CASTELL

Mathema

CASTELL 2/84 N

DER UNIVERSAL-RECHENSTAB

SYSTEM DR.-ING. MOELLER

Racher
2380/2.84
N
15271A

$\sqrt[3]{527}$

4,32

$\frac{3750}{0{,}25 \cdot 45}$

$2\frac{1}{3}$

$D = \frac{\pi}{4}\, 32^2$

A. W. FABER-CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

168 ● Printed in Germany 1/784 d.

Der logarithmische Universal-Rechenstab MATHEMA

von Dr.-Ing. Eugen Moeller, Darmstadt

Geschichte des Logarithmischen Rechenstabes

Der **logarithmische Rechenstab** verdankt seine Entstehung und Entwicklung im wesentlichen
der Aufstellung der Logarithmen durch **Jost Bürgi** (1607) und durch **Lord John Napier** (1614),
der Aufzeichnung von logarithmischen Skalen durch **Edmond Gunter** (1624),
der Verwendung eines zweiten verschiebbaren Stabes durch **Wingste** (1627),
der Anordnung zweier gleichartiger logarithmischer Stäbe durch **William Oughtred** (1630),
der Erfindung des Schiebers in einem Stabkörper durch **Seth Partridge** (1657),
der Aufstellung doppellogarithmischer Skalen durch **Roget** (1815),
der Wiedererfindung des Läufers durch **Mannheim** (1851)
und der klassischen Gemeinschaftsarbeit „Darmstadt" unter der Leitung von **Prof. Dr. Alwin Walther** (1934).

Aufbau des Mathema-Stabes

Der **Mathema-Stab** ist für die Anwendung in der praktischen Mathematik und für die mathematische Behandlung der Naturgesetze geschaffen. Zu diesem Zweck ist er als doppelseitiger Rechenstab (Duplex-Form) ausgeführt und mit allen elementaren Funktionsskalen so vollständig versehen, daß die Rechnungen tunlichst direkt und daher bequem und genau durchgeführt werden können. Die Anordnung der am häufigsten gebrauchten Skalen auf der Vorderseite des Stabes, die Einführung einer gemeinsamen Einheit für die Argumente der Kreis- und der Hyperbelfunktionen, die formelmäßigen Bezeichnungen der Stammfunktionen und ihrer Umkehrungen, die folgerichtigen Bezifferungen der Skalen, die großen Skalenlängen und die Marken auf dem Läufer erleichtern die Handhabung des Mathema-Stabes wesentlich.

Die **feststehende Hauptskala,** auf die alle übrigen Skalen des Stabkörpers bezogen sind, wird mit Y bezeichnet.

Die **bewegliche Hauptskala,** auf die alle übrigen Skalen des Stabkörpers bezogen sind, wird mit y bezeichnet.

Die beiden Hauptskalen sind, zur einfacheren Handhabung des Stabes, sowohl auf der Stabvorderseite (untere Gleitfuge) als auch auf der Stabrückseite (obere Gleitfuge) angeordnet und im Dekadenbereich (0,1 bis 10) besonders gekennzeichnet.

Die **Stammfunktionen** sind mit f(X) oder mit f(x) bezeichnet, wenn sie auf die Hauptskala Y bzw. auf die Hauptskala y bezogen sind. Hier ist demnach wie üblich

$$Y = f(X),$$
$$y = f(x).$$

Die **Umkehrfunktionen** gehen von den Hauptskalen Y **und** y aus und werden mit f (Y) bzw. mit f (y) bezeichnet.

Um die Funktionen im praktisch wichtigen Bereich darstellen zu können, sind einige **Skalen in mehreren Stufen** aufgetragen.

Dem gleichen Zwecke dienen die über die Hauptdekade der Hauptskalen hinausgehenden **Skalenerweiterungen** vieler Funktionen.

Die ebenfalls über die Hauptdekade der Hauptskalen hinausgehenden **Skalenwiederholungen** einiger Funktionen machen ein Umstellen des Schiebers von einer Endlage in die andere in vielen Fällen unnötig.

Alle rechtsläufigen Skalen sind **schwarz** gefärbt. Die **rückläufigen Skalen,** das sind solche, deren Zahlenwerte auf dem Rechenstabe von rechts nach links zunehmen, sind **rot** gefärbt.

Als **gemeinsame Einheit** für die Argumente der Kreis- und der Hyperbelfunktionen, die miteinander verwandt und in den Formeln daher oft miteinander gekoppelt sind, dient der **Neugrad**. Zur bequemen Umwandlung von Neugraden in das Bogenmaß (Radiant) besitzt der Läufer Einstellmarken für den Faktor $\pi/2$ auf den Normalskalen.

Die **Kommastellungen** bei den Zahlenangaben auf dem Mathema-Stab sind **einheitlich** auf die trigonometrischen und pythagoreischen Skalen ausgerichtet; ausgenommen hiervon sind die Skalen mit eingeklammerten Funktionsausdrücken.

Die Bezeichnungen der Zahlenwerte sind zwecks guter Lesbarkeit und Übersicht kurz gehalten.

Ein **Punkt** vor oder hinter einer Ziffer bedeutet, daß dieser Ziffer so viele Dezimalnullen vorangehen bzw. so viele Nullen folgen wie die benachbarte kleinere ganzzahlige Zehnerpotenz angibt.

Die Skalen mit Ausnahme der für e^X bzw. ln Y sind **ungleichmäßig geteilt.** Insbesondere sind die Intervalle zwischen den Skalenstrichen an verschiedenen Stellen einer Skala verschieden groß. Einheiten im Dezimalsystem sind nicht immer in 10 Intervalle geteilt, sondern je nach dem Bedürfnis auch in 5 oder in 2. Die gegenseitigen Zuordnungen der Skalenwerte der verschiedenen Funktionen werden in der Regel mit dem Hauptstrich des **Läufers** hergestellt. Am linken Stabende benutzt man mit Vorteil den linken Läuferstrich, am rechten Stabende den rechten, wenn es sich nicht um die Skalen e^X bzw. ln Y handelt. Die Abstände der Läuferstriche voneinander entsprechen den Faktoren $\pi/2$ und $\pi/4$. Die Spalten der **Rechenbeispiele** in dieser Schrift und auf dem beigelegten Zusatzstreifen sind in der Reihenfolge der einzelnen Rechenschritte von links nach rechts geordnet und stimmen daher im allgemeinen nicht mit der räumlichen Verteilung der Größen auf den Skalen überein. Die für die Beispiele benötigten Funktionsskalen sind als teilweise Wiedergaben der Beschriftungen angegeben.

Theorie des Stabrechnens

Das Prinzip des logarithmischen Stabrechnens besteht darin, die mechanisch ausführbare **Addition und Subtraktion** von Strecken dadurch in die beiden höheren Rechenstufen zu verwandeln, daß diese Strecken Funktionsgrößen im logarithmischen Maßstab darstellen.

Man erhält **Multiplikationen und Divisionen** der natürlichen Zahlen, wenn auf den beiden zusammenzusetzenden Skalen die Logarithmen der natürlichen Zahlen aufgetragen sind. Es ist

$$\ln a + \ln b = \ln a{\cdot}b,$$
$$\ln a - \ln b = \ln a{:}b.$$

Ausgangs- bzw. Endpunkt der einfachlogarithmischen Skala ist die Zahl 1, da 1 als Faktor ohne Einfluß und $\ln 1 = 0$ ist.

Die Skalen mit den Logarithmen der natürlichen Zahlen sind **Normalskalen** des Rechenstabes; diese sind **Hauptskalen,** wenn die anderen Skalen auf sie bezogen sind.

Man erhält **Potenzen** und **Wurzeln** der natürlichen Zahlen, wenn die eine Skala eine Hauptskala und die andere eine Skala der Doppellogarithmen der natürlichen Zahlen ist. Es ist

$$\ln (\ln a) + \ln n = \ln (n \cdot \ln a) = \ln (\ln a^n),$$
$$\ln (\ln a) - \ln n = \ln (1/n \cdot \ln a) = \ln (\ln a^{1/n}).$$

Ausgangs- bzw. Endpunkt der doppellogarithmischen Skala ist die Basis der Logarithmen, da deren Logarithmus = 1 und da Logarithmus 1 = 0 ist.

Die Umkehrung des Rechenvorganges liefert die **Exponenten**

$$\ln (\ln a^n) - \ln (\ln a) = \ln (\ln a^n : \ln a) = \ln n,$$
$$\ln (\ln a^{1/n}) - \ln (\ln a) = \ln (\ln a^{1/n} : \ln a) = \ln 1/n.$$

Die Exponenten n und 1/n sind auch die **Logarithmen** der Numeri a^n bzw. $a^{1/n}$ zur Basis a.

Im allgemeinen besteht kein Bedürfnis nach einer **Erweiterung** des Stabrechnens etwa in der Weise, daß zwei Skalen der Doppellogarithmen zueinander addiert werden nach der Beziehung

$$\ln (\ln a) + \ln (\ln b) = \ln (\ln a^{\ln b}) = \ln (\ln b^{\ln a}).$$

Es genügt, daß diese und ähnliche Rechenarten auf dem Stab mittels einfacher Schritte ausgeführt werden können. Dagegen ist es für eine umfassende Anwendungsmöglichkeit des Rechenstabes in Mathematik, Physik und Technik von Wichtigkeit, daß die elementaren und einige andere **Funktionen** auf dem Rechenstab enthalten und den Hauptskalen zugeordnet sind. An den Funktionsskalen f(X) und f(x) können nach ihrer Projektion auf die Hauptskalen oder auf die Skala der Doppellogarithmen alle höheren Rechenoperationen vorgenommen werden entsprechend den Beziehungen:

$$\ln f(X) + \ln f(x) = \ln (f(X) \cdot f(x)),$$
$$\ln f(X) - \ln f(x) = \ln (f(X) : f(x)),$$
$$\ln (\ln f(X)) + \ln f(x) = \ln (\ln f(X)^{f(x)}),$$
$$\ln (\ln f(X)) - \ln f(x) = \ln (\ln f(X)^{1/f(x)}).$$

Auch die **Beziehungen zwischen den Funktionsskalen** sind von Bedeutung. Beim Übergang von einer Skala f(X) auf eine Skala f(Y) findet man die Funktion $f(X)_{f(y)}$, indem man die Größe Y durch die Funktion f(X) ersetzt.
Das gleiche gilt für den Übergang von einer Skala f(x) auf eine Skala f(y).
Beim Übergang von einer Skala f(X) auf eine Skala f(y) ist f(X) noch mit dem Faktor zu versehen, der gegenüber dem Endstrich Y = 1 auf der Hauptskala y steht.
Entsprechendes gilt für den Übergang von einer Skala f(x) auf eine Skala f(Y); der Faktor von f(x) steht gegenüber von y = 1 auf Y.
Mittels der Marken auf dem Läufer können beim Übergang auch π-Faktoren eingeführt werden.
Wegen der Zuordnung der Funktionsskalen zu den Hauptskalen sind sie wie diese logarithmiert. Man läßt jedoch die allgemeine Logarithmierung bei der Bezeichnung der Skalen und ihrer Zahlenangaben der Einfachheit wegen außer acht und schreibt die **Numeri** unmittelbar an den Skalenstrichen an. Der Begriff des **logarithmischen** Rechenstabes erinnert an den wahren Sachverhalt.

Die Funktionen sind auf dem Rechenstabe **kontinuierlich** enthalten. Sie sind daher bei bequemer **Interpolationsmöglichkeit** nur mit **begrenzter Genauigkeit** einstell- und ablesbar. Ist L die dem Rechenstabe zugrundegelegte Länge für die Einheit ln e = 1, dann ist die Länge z der logarithmischen Strecke der Größe y

$$z = L \cdot \ln y.$$

Mit den Einstell- und Ablesefehlern usw. von der Länge $\triangle z$ wird der **relative Fehler der Hauptskala y**

$$\triangle y/y = \triangle z/L;$$

er ist also konstant und von den Funktionen f(x), die etwa auf die Skala y übertragen werden, unabhängig.
Für L = (200 mm Dekadenlänge) /ln 10 = 86,8.. mm und $\triangle z$ = L/500 = 0,17.. mm erhält man den relativen Fehler auf der Hauptskala y zu 2 vT.
Bei n aufeinander folgenden Multiplikationen oder Divisionen wächst der wahrscheinliche Fehler nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz auf das $\sqrt{n}$-fache an.

Die Länge z der logarithmischen Strecke einer der Hauptskala zugeordneten Funktion f(x) ist

$$z = L \cdot \ln f(x).$$

Mit den Einstell- und Ablesefehlern usw. von der Länge $\triangle z$ wird der **relative Fehler auf der Funktionsskala f(x)**

$$\triangle x/x = \triangle z\ f(x)\ /Lxf'(x).$$

Mit $\triangle z/L$ = 1/500 erhält man die Fehler in vT nach folgender Tabelle:

f(x)	y = 0,01	0,1	1	10	f(y)
x		2	2		y
$^1/x$		—2	—2		$^1/y$
$^1/\sqrt{x}$		—4	—4		$^1/y^2$
$\sqrt{x}$		4	4		y^2
$\sqrt{1-x^2}$		—0,02	$-\infty$		$\sqrt{1-y^2}$
$\sqrt{x^2-1}$		0,02	1		$\sqrt{1+y^2}$
sin x		2,03	∞		arcsin y
tan x		1,99	1,27		arctan y
sinh x		1,99	1,61	0,66	arsinh y
cosh x			∞	0,67	arcosh y
tanh x		2,03	∞		artanh y
e^x			∞	0,87	ln y
ln x	0,02	0,2	2	20	e^y

Bei der Beschreibung des Rechenvorganges ist ein einfaches Rechenschema angewandt, bei dem die auf den Skalen gegenüber stehenden Werte durch einen schrägen Strich (/) und der Übergang auf einen anderen Skalenbereich durch zwei schräge Striche (//) gekennzeichnet sind. Die Kennzeichnung der Skalen erfolgt hierbei durch Anschreiben der Funktion f(x) vor den Buchstaben Sk; der Einstell- bzw. Ablesewert wird nachfolgend angeschrieben. Die Bezeichnung Gst bedeutet die Einstellung des Schiebers in Grundstellung, also so, daß sich die Hauptskalen decken.

Die Skalen des Mathema-Stabes und ihre gegenseitigen Beziehungen

Die Hauptskalen Y und y und ihre Reziproke $^1/y$

Die **Dekadenabschnitte** von 0,1 bis 1 und von 1 bis 10 usw. einer logarithmischen Skala der natürlichen Zahlenreihe wiederholen sich in kongruenter Weise, denn die Logarithmen unterscheiden sich nur um die der Zehnerpotenzen. Ein

Dekadenabschnitt der Hauptskalen Y und y enthält also bereits alle denkbaren Zahlenwerte, wenn man von den Stellenzahlen absieht. Man macht hiervon Gebrauch, indem man jeden Teilungsstrich für eine ganzzahlige Zehnerpotenz als **Anfangs-** bzw. **Endstrich** der Hauptskala betrachtet. Man darf demnach auch den Schieber in Bezug auf die Hauptskalen aus einer Lage in die ihr kongruente am anderen Stabende **umstellen**, um das Rechenergebnis in den passenden Bereich des Stabes zu bringen.

Die Skala $1/y$ ist eine **rückläufige** Hauptskala gemäß der Beziehung $\ln 1/y = -\ln y$.

Sie erlaubt die **Umwandlung** einer Multiplikation mit a in eine Division durch $1/a$ und umgekehrt.

Die Beziehungen zwischen den Hauptskalen Y einerseits und y und 1/y anderseits sind die der **Multiplikation** und der **Division.**

Einzelrechnungen beginne man in der Regel mit der **Bewegung des Läufers**, um nach der anschließenden Schieberbewegung das Ergebnis **innerhalb der Hauptdekade** zu erhalten und um bei längeren Ausdrücken **unmittelbar weiterrechnen** zu können.

Bei **Tabellenrechnungen** ist es angebracht, einen **Schieberendstrich** dem konstant bleibenden Ausdruck auf der Skala Y gegenüberzustellen, um entweder mittels der Skala y mit variablen Faktoren zu multiplizieren oder mittels der Skala $1/y$ durch variable Divisoren zu dividieren.

Die **Einstellung** der Zahlen auf den Hauptskalen, die mit dem Läuferstrich oder auf den Skalen Y und y mit einem Endstrich der anderen Skala vorgenommen werden kann, geschieht unabhängig vom Komma in der Reihenfolge der Ziffern. Bei Zahlen wie 1234 ist die 4. Ziffer nur schätzungsweise einzustellen. Bei Zahlen wie 8765 kann die vierte Ziffer kaum noch genügend berücksichtigt werden.

Eine **Division** wie $2468 : 8{,}765 = 281{,}6$ erhält man, indem man den Läuferstrich auf Y = 2468 und den Schieber mit y = 8765 unter den Läuferstrich bringt; das Ergebnis findet man auf der Skala Y gegenüber einem Endstrich der Skala y;

Y Sk 2468 / y Sk 8,765 // y Sk 1 / Y Sk 281,6.

Eine **Multiplikation** wie $234 \cdot 567 = 1327 \cdot 10^2$ erhält man, indem man den Läuferstrich auf Y = 234 und den Schieber mit $1/y = 567$ unter den Läuferstrich bringt. Das Ergebnis findet man auf der Skala Y gegenüber einem Schieberendstrich;

Y Sk 234 / $1/y$ Sk 567 // y Sk 0,1 / Y Sk $1327 \cdot 10^2$.

Die letzten Stellen von einfacheren Quotienten und Produkten können durch Überlegung exakt angegeben werden. Mit ihnen übt man das Abschätzen der Werte zwischen den Skalenstrichen. Beispiele: $605 : 4 = 151{,}25$; $202 \cdot 3 = 606$

Die **Stellenzahl** des Ergebnisses ergibt sich aus einer überschlägigen Kopfrechnung, in unübersichtlichen Fällen nach der Abspaltung von Zehnerpotenzen. Beispiel: $246800 : 0{,}008765 = \text{rd. } 3 \cdot 10^{5+2} = 2316 \cdot 10^4$.

Mit der **abwechselnden** Benutzung von Läufer und Schieber ist **fortgesetztes** Multiplizieren und Dividieren möglich; man braucht dabei **keine Zwischenergebnisse** abzulesen oder Schieberendstriche auf sie einzustellen. Wenn es sich beispielsweise nur um Faktoren handelt, dann benutzt man außer der Skala Y die Skalen $1/y$ und y abwechselnd. So setzt man $a \cdot b \cdot c \cdot d = a : 1/b \cdot c : 1/d$. Man findet $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78 = 1782 \cdot 10^3$. Bei Ausdrücken wie $a/bcd = a : b \cdot 1/c : d$ findet man $1782/(12 \cdot 34 \cdot 56) = 0{,}078$.

Im folgenden ist schematisch dargestellt, wie die möglichen Verknüpfungen zweiter Stufe der Größen a, b und c auszurechnen sind.

$1/y$		c	b	b c	$1/y$
y	b c	b	c		y
Y	a ac/b	a a/bc	a abc	a ab/c	Y

Wenn ein Faktor eines **Produktes** nahe bei 1 liegt und sehr genau bekannt ist, wie bei einigen Umkehrfunktionen auf dem Mathema-Stab, dann erzielt man beim Multiplizieren durch die **Zerlegung** des Faktors in die Zahl 1 und in die Abweichung hiervon eine erhöhte Genauigkeit. Beispiel: $0{,}9876 \cdot 543 = (1 - 0{,}0124) \cdot 543 = 543 - 6{,}73 = 536{,}27$. Andernfalls erhielte man nur den Wert 536.

Wenn ein **Quotient** aus sehr genau bekannten Gliedern nahe bei 1 liegt oder wenn die Differenz dieser Glieder genau bekannt ist, dann empfiehlt sich die **Zerlegung** ebenfalls. Beispiel: $456/455 = 1 + 1/455 = 1{,}002198$. Andernfalls erhielte man nur den Wert 1,002.

Gegenüber den Anfangs- und Endstrichen der Skalen Y und y stehen wechselseitig reziproke Werte. Man kann daher Brüche auch mit vertauschten Zählern und Nennern **reziprok ausrechnen**, um direkt zu den Ergebnissen zu gelangen. Diese Methode ist dann am Platze, wenn eine auf die Skala Y bezogene Stammfunktion im Nenner eines Bruches steht. Beispiel: $678 \cdot \operatorname{cosec} 30^g = 1 / (\sin 30^g : 678) = 1493$, wobei $\sin 30^g = 0{,}454$ nicht abgelesen zu werden braucht. Das Ergebnis erscheint nun auf der Skala y, indem man den Läuferstrich auf $\sin 30^g$ und den Schieber mit y = 678 unter den Läuferstrich stellt.

Mittels der **Marke** $\pi/2$ auf dem Läufer können Neugrade ^{g} eines Winkels in das Bogenmaß rad verwandelt werden und umgekehrt. Es ist

$$1^g = \pi/200 \text{ rad} = 0{,}01570796 \text{ rad},$$
$$1 \text{ rad} = 200/\pi^g = 63{,}66198^g,$$
$$\pi = 3{,}1415927 = 1/0{,}3183099.$$

Der Faktor $\pi/2$ entspricht auf den Hauptskalen dem Abstand des linken Läuferstrichs, der die Bezeichnung 1 hat, vom rechten Läuferstrich. Beispiele: $87{,}6^g = 1{,}376$ rad; $0{,}234$ rad $= 14{,}9^g$.

Die **lineare Interpolation** von Zahlenwerten beruht auf der genügend genauen Proportionalität zwischen den Differenzen der Argumente und den Differenzen der Funktionswerte in den geeigneten Fällen. Der Rechenstab kann hierfür in naheliegender Weise selbst dann als Hilfsmittel dienen, wenn es sich um vielstellige Tabellenwerte handelt. Für wiederholte Interpolationen zwischen der kleineren Zahl a und der größeren Zahl b, die beide nur mit Rechenstabgenauigkeit bekannt oder zugrundezulegen sind und die Argumentendifferenz d haben, eignet sich folgende Methode. Man bringt y = d über Y = b—a; dann steht der Zahl a auf der Skala Y eine Zahl c auf der Skala y gegenüber, ferner der Zahl b auf der Skala Y die Zahl c+d auf der Skala y; die auf der Skala y ersichtlichen Argumentenveränderungen, d. h. die von c oder gegebenenfalls von c+d abweichenden Beträge ergeben auf der Skala Y die zugehörigen Funktionswerte und umgekehrt. Man erhält folgendes Schema:

y	d	c	c+d	y
Y	b—a	a	$<$ b	Y

Zum Beweise schreibt man ausführlich

$$c = ad/(b-a)$$
$$c+d = bd/(b-a) = ad/(b-a) + d.$$

Die Größe c darf ohne wesentlichen Nachteil abgerundet werden, um das Ablesen der Argumenten-Veränderungen zu erleichtern.

Beispiel: a = 456; b = 789; d = 2. Man findet c = 2,738 = rd. 2,74. Für den Argumentenzuwachs 0,234 wird der Funktionswert = 495, wenn die Argumente von a nach b zunehmen; im anderen Falle wird der Funktionswert = 750.

Die Wurzeln der **quadratischen Gleichung**

$$x^2 + ax + b = 0$$

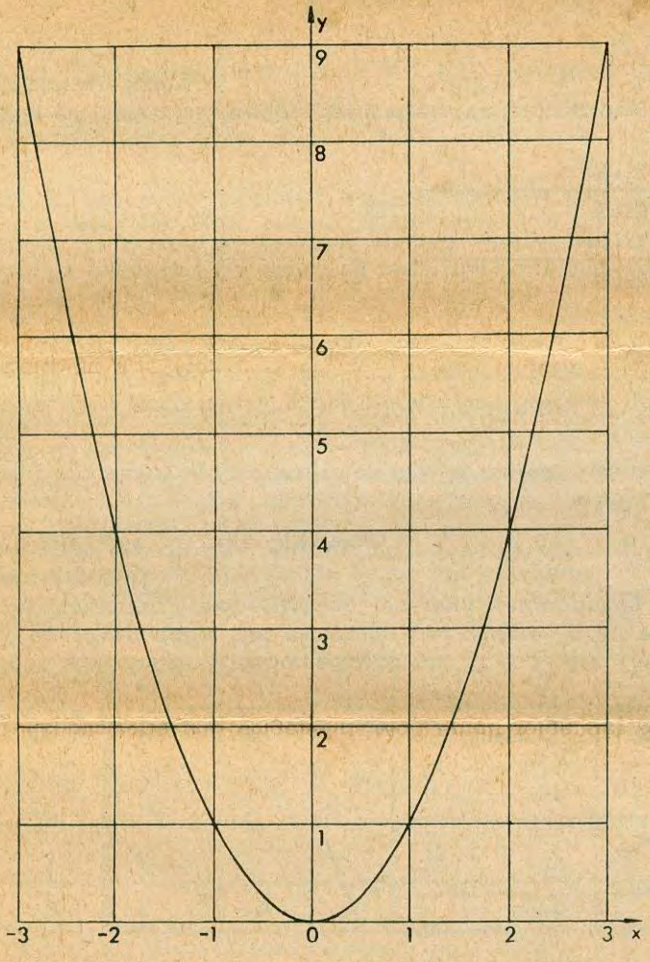
ergeben sich im Reellen aus den Abszissen der Schnittpunkte der Einheitsparabel

$$y_1 = x^2$$

und der Geraden

$$y_2 = -ax - b.$$

Das Anlegen einer Linealkante an die Parabel und ein Abschätzen genügt, wenn man die gefundenen Lösungen mit Hilfe des Rechenstabes verbessert.



Quadratische Einheitsparabel $y = x^2$

Hierzu bringt man die gegebene Gleichung in die Rechenstabform

$$x + b/x = -a$$

und stellt einen Schieberendstrich auf Y = b; mittels des Läuferstrichs erhält man dann von der Skala Y aus zu jedem beliebigen Werte von x die zugehörigen Werte b/x auf der Skala $^1/y$. Die Summe der beiden Werte soll = — a sein, was durch Probieren erreicht werden muß.

Da die Wurzeln x_1 und x_2 dem Viëtaschen Satze gehorchen, wonach

$$x_1 + x_2 = -a$$

ist, so findet man auf dem Rechenstab **die beiden Wurzeln** gleichzeitig.

Beispiel: $x - 2/x = 3$; $x_1 = 3,56$; $x_2 = -0,56$.

Wenn die Gerade y_2 die Parabel y_1 nicht schneidet und die Wurzeln demnach konjugiert komplex sind, dann wendet man die auch sonst gültige Formel an:

$$x_1, x_2 = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}$$

Die Maßzahlen der Koordinaten im beistehenden Bilde der quadratischen Einheitsparabel können als Numerierungen gelten, wenn es erforderlich ist, die Maßstäbe der Koordinaten zu verändern. Es ist dabei zu beachten, daß die Gleichung der quadratischen Einheitsparabel erhalten bleiben muß. Wenn man z. B. die Abszissenmaße verdoppelt, muß man die Ordinatenmaße vervierfachen.

Die Hauptskalen eignen sich für die Verwendung im **Hornerschen Schema** zur Bestimmung des Wertes von Gleichungen folgender Art

$$b_0 = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

für einen bestimmten Wert von x. Hierzu schreibt man die Koeffizienten in eine Reihe und ergänzt das Schema schrittweise wie angegeben, wobei $b_4 = a_4$ ist, $b_3 = a_3 + b_4 x$, $b_2 = a_2 + b_3 x$ usw. Durch wiederholte Anwendung findet man $c_1 = f'(x)/1!$, $d_2 = f''(x)/2!$ usw. für den angenommenen Wert von x.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
x & & +b_4\,x & +b_3\,x & +b_2\,x & +b_1\,x \\
\hline
 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \underline{\underline{b_0 = f(x)/0!}} \\
 & & +c_4\,x & +c_3\,x & +c_2\,x & \\
\hline
 & c_4 & c_3 & c_2 & \underline{\underline{c_1 = f'(x)/1!}} & \\
 & & +d_4\,x & +d_3\,x & & \\
\hline
 & d_4 & d_3 & \underline{\underline{d_2 = f''(x)/2!}} & &
\end{array}
$$

Man stellt einen Schieberendstrich auf $Y = x$, den Läuferstrich auf b_n, c_n und d_n und liest die Produkte auf der Skala Y ab. Wenn dabei der eine oder der andere Faktor eine Schieberumstellung verlangen sollte, multipliziert man bei unveränderter Schieberstellung mit dem verdoppelten oder mit dem halbierten Faktor und halbiert bzw. verdoppelt das Ergebnis.

Beispiel: Die kubische Gleichung

$$x^3 - 15{,}4\,x^2 + 82{,}65\,x - 150{,}7 = 0$$

wird dadurch vom quadratischen Gliede befreit, daß man

$$x = y + 15{,}4/3$$

setzt. Dies kann mit Hilfe des Hornerschen Schemas geschehen, indem man es in zwei Stufen mit dem Werte $15{,}4/3 = 5{,}1333$ durchführt, um die Koeffizienten der reduzierten Gleichung zu erhalten. Man stellt $y = 3$ auf $Y = 154$ ohne Zuhilfenahme des Läufers ein und erhält

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -15{,}4 & 82{,}65 & -150{,}7 \\
 & & +\;5{,}133 & -52{,}70 & +153{,}7 \\
\hline
15{,}4/3 & 1 & -10{,}267 & 29{,}95 & \underline{\underline{3{,}0}} \\
 & & +\;5{,}133 & -26{,}35 & \\
\hline
 & 1 & -\;5{,}133 & \underline{\underline{3{,}60}} &
\end{array}
$$

Wie ersichtlich ist, ergäbe die weitere Verfolgung des Schemas, daß das zweite Glied verschwindet. Die reduzierte Gleichung lautet $y^3 + 3{,}6\,y + 3 = 0.$

Die Parabelskalen $\sqrt{X}$ .. Y^2, $\sqrt{x}$ .. y^2 und ihre Reziproke $1/\sqrt{x}$ .. $1/y^2$

Die Parabelskalen und ihre Reziproke sind auf dem Mathema-Stab wegen der großen Bedeutung der **Quadrate und Quadratwurzeln** in der gleichen Ausführlichkeit wie die Hauptskalen aufgenommen. Da

$$\ln \sqrt{x} = \tfrac{1}{2} \ln x$$

ist, so liegen hier ebenfalls Normalskalen vor; ihre Teilungslängen sind halb so groß wie die der Hauptskalen. Man kann daher mit ihnen ebenso multiplizieren und dividieren wie mit den Hauptskalen und ihrer Reziproken und dabei sogar ganz ohne Schieberumstellungen auskommen, was beispielsweise beim **linearen Interpolieren** von Tabellenwerten angenehm ist; man muß aber den doppelten relativen Fehler in Kauf nehmen, wenn nicht die Wurzel aus dem Produkt oder aus dem Quotienten zu ziehen ist.

Da sowohl die Quadratwurzeln als auch die Quadrate der gewöhnlichen Zahlenreihe im Bilde Parabeln darstellen, so ist die **Parabelskala** ein Sammelbegriff für die Quadratwurzel- und Quadratskala.

Der Dekade einer Hauptskala sind **zwei Dekaden** der Parabelskala zugeordnet. Beim Wurzelziehen, was mit dem Läuferstrich oder mit einem Schieberendstrich geschehen kann, ist von der linken bzw. von der rechten Dekade auszugehen, wenn die Anzahl der Ziffern vor dem Komma oder die der Dezimalnullen hinter dem Komma ungerade bzw. gerade ist. Beispiele: $\sqrt{123} = 11{,}09$; $\sqrt{12{,}3} = 3{,}507$; $\sqrt{0{,}0123} = 0{,}1109$; $\sqrt{0{,}123} = 0{,}3507$.

Kommen in **zusammengesetzten Ausdrücken** außer den linearen Faktoren und Divisoren nur noch solche im Quadrat oder nur noch solche unter dem Wurzelzeichen vor, so sind die linearen Glieder mittels der Parabelskalen bzw. mittels der Hauptskalen zu berechnen.

Im folgenden Schema sind die Ergebnisse für den Fall dargestellt, daß man eine Größe a mittels Läuferstrichs auf der Skala Y einstellt, eine Größe b auf den angegebenen Schieberskalen unter den Läuferstrich bringt und die Resultate sowohl auf den feststehenden als auch auf den beweglichen Haupt- und Parabelskalen gegenüber den Endstrichen abliest.

$\sqrt{X}$	a^2	a^2/b^2	1	a^2	$a^2 \cdot b^2$	1	a^2	$a^2 \cdot b$	1	a^2	a^2/b	1	Y^2
$\sqrt{x}$	b^2	1	b^2/a^2	$1/b^2$	1	$1/a^2 b^2$	$1/b$	1	$1/a^2 b$	$\underline{b}$	1	b/a^2	y^2
$1/\sqrt{x}$	$1/b^2$	1	a^2/b^2	b^2	1	$a^2 b^2$	$\underline{b}$	1	$a^2 b$	$1/b$	1	a^2/b	$1/y^2$
$1/y$	$1/b$	1	a/b	$\underline{b}$	1	ab	$\sqrt{b}$	1	$a\sqrt{b}$	$1/\sqrt{b}$	1	$a/\sqrt{b}$	$1/y$
y	$\underline{b}$	1	b/a	$1/b$	1	$1/ab$	$1/\sqrt{b}$	1	$1/a\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{b}/a$	y
Y	$\underline{a}$	a/b	1	$\underline{a}$	ab	1	$\underline{a}$	$a\sqrt{b}$	1	$\underline{a}$	$a/\sqrt{b}$	1	Y

Das nächste Rechenschema entspricht dem vorigen mit dem Unterschied, daß sich a auf der Skala $\sqrt{X}$ befindet.

$\sqrt{X}$	$\underline{a}$	a/b^2	1	$\underline{a}$	ab^2	1	$\underline{a}$	ab	1	$\underline{a}$	a/b	1	Y^2
$\sqrt{x}$	b^2	1	b^2/a	$1/b^2$	1	$1/ab^2$	$1/b$	1	$1/ab$	$\underline{b}$	1	b/a	y^2
$1/\sqrt{x}$	$1/b^2$	1	a/b^2	b^2	1	ab^2	$\underline{b}$	1	ab	$1/b$	1	a/b	$1/y^2$
$1/y$	$1/b$	1	$\sqrt{a}/b$	$\underline{b}$	1	$\sqrt{a}\,b$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{ab}$	$1/\sqrt{b}$	1	$\sqrt{a/b}$	$1/y$
y	$\underline{b}$	1	$b/\sqrt{a}$	$1/b$	1	$1/\sqrt{a}\,b$	$1/\sqrt{a}\,b$	1	$1/\sqrt{ab}$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{b/a}$	y
Y	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}/b$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\,b$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{ab}$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a/b}$	1	Y

Die obere **Marke** $\pi/4$ auf dem Läufer, die wie die obere Marke $\pi/2$ vom mittleren Läuferstrich aus zählt, ermöglicht es, den **Inhalt des Kreises** von gegebenem Durchmesser von einer Hauptskala aus auf der entsprechenden Parabelskala unmittelbar einzustellen oder in umgekehrter Reihenfolge den **Durchmesser eines Kreises** von gegebenem Inhalt.

Beispiele: $\pi/4 \cdot 2345^2 = 432 \cdot 10^4$; $\sqrt{2345 \cdot 4/\pi} = 54{,}55$.

Der **Kubus** und die Quadratwurzel hieraus, ebenso die **Kubikwurzel** und das Quadrat hiervon, erscheinen bei Benutzung der Haupt- und der Parabelskalen auf feststehenden Normalskalen, so daß ein Weiterrechnen möglich ist.

In der folgenden Darstellung der Bildung der **3. Potenz** ist es gleichgültig, auf welcher Dekade der reziproken Parabelskala man die Ausgangsgröße einstellt. Bei den Quadratwurzeln hieraus sind jedoch die Dekadenregeln für das Quadratwurzelziehen schon beim Einstellen der Ausgangsgröße zu beachten, weshalb diese Ausdrücke eingeklammert sind. Beispiele: $2^{3/2} = 2{,}828$; $20^{3/2} = 89{,}4$.

Bei der Bildung der **3. Wurzel** ist die Tatsache, daß sie **durch Probieren** gefunden werden muß, durch einen Doppelstrich versinnbildlicht; die Werte auf den Skalen $1/\sqrt{x}$..$1/y^2$ und Y unter dem Läuferstrich müssen miteinander übereinstimmen. Es ist dabei gleichgültig, auf welcher Dekade der feststehenden Parabelskala man die Ausgangsgröße ein-

stellt, wenn man das ungefähre Ergebnis ohnehin im voraus abschätzt, um von 3 möglichen Läuferstellungen die richtige zu wählen. Bei den Quadratwurzeln sind die entsprechenden Dekadenregeln schon beim Einstellen der Ausgangsgröße zu beachten, weshalb diese Ausdrücke eingeklammert sind.

Beispiele: $2^{2/3} = 1{,}587$; $20^{2/3} = 7{,}37$; $200^{2/3} = 34{,}2$.

$\sqrt{X}$		a^3	1	$\underline{b}$	$b^{2/3}$	1	Y^2
$\sqrt{x}$		1	$1/a^3$	1	$1/b^{1/3}$	$1/b$	y^2
$1/\sqrt{x}$	$\underline{a}$	1	a^3	1	$\underline{\underline{b^{1/3}}}$	b	$1/y^2$
$1/y$		1	$(a^{3/2})$	1	$(b^{1/6})$	$(\sqrt{b})$	$1/y$
y		1	$(1/a^{3/2})$	1	$(1/b^{1/6})$	$(1/\sqrt{b})$	y
Y	$\underline{a}$	$(a^{3/2})$	1	$\sqrt{b}$	$\underline{\underline{b^{1/3}}}$	1	Y

Die **4. Potenzen** werden mittels eines Schieberendstrichs auf der feststehenden Parabelskala eingestellt, indem man mittels des Läuferstrichs die Basis auf der Skala Y markiert und den Schieber mit der Basis auf der Skala $1/y$ unter den Läuferstrich bringt. Man hat dann in Bezug auf die feststehende Parabelskala das Quadrat der Basis ins Quadrat erhoben.

Die **4. Wurzeln** erhält man ohne Probieren durch zweimaliges Quadratwurzelziehen, wobei die entsprechenden Dekadenregeln zu beachten sind. Beispiele: $2^{1/4} = 1{,}189$; $20^{1/4} = 2{,}115$; $200^{1/4} = 3{,}760$; $2000^{1/4} = 6{,}69$.

Die Wurzel der **reduzierten kubischen Gleichung**

$$x^3 + ax + b = 0$$

ergeben sich im Reellen aus den Abszissen der Schnittpunkte der kubischen Einheitsparabel

$$y_1 = x^3$$

und der Geraden

$$y_2 = -ax - b.$$

Das Anlegen einer Linealkante an die kubische Parabel und ein Abschätzen genügt, wenn man die gefundenen Lösungen mit Hilfe des Rechenstabes verbessert. Hierzu bringt man die gegebene Gleichung in die Rechenstabform

$$x^2 + b/x = -a$$

und stellt einen Schieberendstrich auf Y = b; mittels des Läuferstrichs erhält man dann von der Skala Y aus zu jedem beliebigen Werte von x^2 auf der feststehenden Parabelskala die zugehörigen Werte b/x auf der Skala $^1/y$.

$\sqrt{X}$		x_1^2	Y^2
$^1/y$		b/x_1	$^1/y$
y	1		y
Y	b	x_1	Y

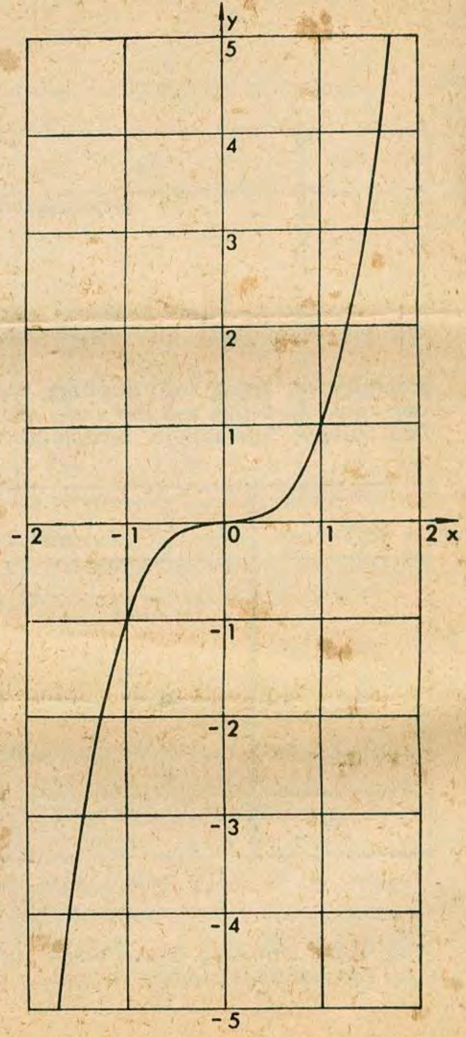
Die Summe der beiden Werte soll = — a sein, was durch Probieren erreicht werden muß. Wenn man eine Wurzel x^1 kennt, findet man die beiden anderen aus

$$x_2, x_3 = -x_1/2 \pm \sqrt{-a - 3x_1^2/4},$$

was insbesondere dann erforderlich sein kann, wenn diese konjugiert komplex sind. Bei der Kenntnis von zwei Wurzeln der Gleichung erhält man die dritte gemäß dem Viëtaschen Satze aus der Ergänzung der Wurzelsumme zum negativen Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes der Gleichung, hier also zu Null.

Beispiel: $x^3 + 3{,}6\,x + 3 = 0;\quad x_1 = -0{,}726;\quad x_2, x_3 = 0{,}363 \pm 2\,i.$

Die Maßzahlen der Koordinaten im beistehenden Bilde der kubischen Einheitsparabel können als Numerierungen gelten, wenn es erforderlich ist, die Maßstäbe der Koordinaten zu verändern. Es ist dabei zu beachten, daß die Gleichung der kubischen Einheitsparabel erhalten bleiben muß. Wenn man z. B. die Abszissenmaße verdoppelt, muß man die Ordinatenmaße verachtfachen.



Kubische Einheitsparabel $y = x^3$

Das genauere **Ausziehen der Quadratwurzel** aus der Zahl c geschieht zweckmäßig in der Form

$$\pm\sqrt{c} = \pm\sqrt{a^2 \pm R} = a \pm x,$$

indem man x mittels des Rechenstabes durch Probieren gemäß folgender Bedingung bestimmt:

$$R : (2a \pm x) = x.$$

Dieses Verfahren kann auch nach mehreren Rechenschritten des exakten Wurzelziehens angewandt werden.

Beispiele: $\sqrt{123456} = \sqrt{122500 + 956} = 350 + 1{,}163 = 351{,}363$, denn es ist $956 : (700 + 1{,}363) = 1{,}363$.

$\sqrt{159876} = \sqrt{160000 - 124} = 400 - 0{,}155 = 399{,}845$, denn es ist $124 : (800 - 0{,}155) = 0{,}155$.

Bei der **quadratischen Interpolation** einer Funktion ersetzt man die Funktionskurve durch eine Parabel. Die Funktionswerte $y = f(x)$ seien für gleiche Argumentabstände bekannt, und es werde entweder zur Abszisse $x_0 + \triangle x < x_1$ die Ordinate $y_0 + \triangle y$ gesucht, oder es werde umgekehrt zur Ordinate $y_0 + \triangle y < y_1$ die Abszisse $x_0 + \triangle x$ gesucht. Der Punkt $y_0 + \triangle y = f(x_0 + \triangle x)$ möge nun mit ausreichender Genauigkeit auf der Ersatzparabel liegen; der gesuchte Wert kann dann durch direkte bzw. durch inverse Interpolation ermittelt werden.

Die **Ersatzparabel** muß durch die beiden Punkte x_0, y_0 und x_1, y_1 gehen. Ihre Achse soll der Einfachheit wegen parallel zur Ordinatenachse sein. Als weitere Bedingung zur Bestimmung der Parabel ist die Vorschrift geeignet, daß die Ordinaten der Ersatzparabel die arithmetischen Mittel aus den Ordinaten der Parabel 1 durch den Punkt x_{-1}, y_{-1} und der Parabel 2 durch den Punkt x_2, y_2 sein sollen.

Mit dem linearen Interpolationsglied L und dem quadratischen Interpolationsglied Q ist definitionsgemäß

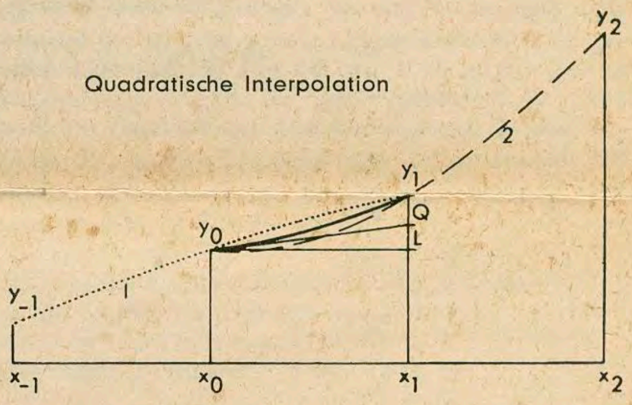
$$\triangle y = \frac{\triangle x}{x_1 - x_0} L + \left(\frac{\triangle x}{x_1 - x_0}\right)^2 Q$$

und $L = y_1 - y_0 - Q.$

Für die inverse Interpolation ergibt sich

$$\triangle x = (\sqrt{1 + 4\triangle y\,Q/L^2} - 1)\,(x_1 - x_0)\,L/2Q.$$

Quadratische Interpolation



Wenn der Wurzelausdruck nahe bei 1 liegt und mit den pythagoreischen Skalen nicht mehr berechnet werden kann, findet man mit der Abkürzung $k = \triangle y\, Q/L^2$

$$\triangle x = (1 - k + 2k^2 - 5k^3 + 14k^4 - 42k^5 + 132k^6 - 429k^7 + 1430k^8 - . + ..)\ (x_1 - x_0)\ \triangle y/L.$$

Q_1 der Parabel 1 ergibt sich wie folgt.

$$y_0 - y_1 = L_1 + Q_1$$
$$y_1 - y_{-1} = 2L_1 + 4Q_1$$
$$Q_1 = (y_{-1} - 2y_0 + y_1) : 2.$$

Analog findet man Q_2 der Parabel 2 zu

$$Q_2 = (y_0 - 2y_1 + y_2) : 2.$$

Demnach wird
$$Q = ((y_2 - y_1) - (y_0 - y_{-1})) : 4$$

oder in Worten: Das quadratische Interpolationsglied ist ein Viertel der Differenz der dem betrachteten Intervall folgenden Tafeldifferenz und der ihm vorausgehenden Tafeldifferenz.

Die Ersatzparabel deckt sich mit der gegebenen Kurve, wenn diese eine Parabel von der Art $y = x^2$ ist; hier ist $L = 2x$ und $Q = 1$ für den Argumentabstand 1, wie aus der Gleichung $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ohne weiteres folgt. Dagegen stimmt die Ersatzparabel mit der Parabel $y = \sqrt{x}$ nicht überein. Man muß daher vor der Aufstellung einer Zahlentafel mit vorausgesetzter quadratischer Interpolation prüfen, welche der beiden Variablen als unabhängige die größere Genauigkeit erreichen läßt, falls eine Wahl überhaupt in Frage kommt. Manchmal empfiehlt es sich, eine Variable als Reziproke anzusetzen.

1. Beispiel. Es seien gegeben $y = e^x$ für $x = 2{,}30$ mit Intervallen von 0,01. Gesucht werden y für $x = 2{,}315$ und x für $y = 10{,}12$.

Mit der folgenden Aufstellung

x	y	Tafeldiff.	Q	L
2,30	9,974 182			
		0,100 243		
2,31	10,074 425			
		0,101 249	0,000 506	0,100 743
2,32	10,175 674			
		0,102 268		
2,33	10,277 942			

erhält man $e^{2{,}315} = 10{,}074\,425 + 0{,}050\,371 + 0{,}000\,127 = 10{,}124\,923$, was mit dem wahren Wert übereinstimmt. Im allgemeinen stellt man $\triangle x/(x_1 - x_0)$ auf der Skala Y ein, um mit L auf der Skala y den linearen Teil und bei gleicher Schie-

berstellung mit Q auf der Skala $\sqrt{x}\,..\,y^2$ den quadratischen Teil von $\triangle y$ abzulesen.

Für $y = 10{,}12$ wird $k = 0{,}002\,2722$ und $x = 2{,}314\,514$, was mit dem wahren Wert übereinstimmt.

2. Beispiel. Es seien gegeben $y = \ln x$ für $x = 10{,}0$ mit Intervallen von 0,1. Gesucht werden y für $x = 10{,}15$ und x für $y = 2{,}317$.

Mit der folgenden Aufstellung

x	y	Tafeldiff.	Q	L
10,0	2,302 585			
		0,009 950		
10,1	2,312 535			
		0,009 853	—0,000 0485	0,009 9015
10,2	2,322 388			
		0,009 756		
10,3	2,332 144			

erhält man $\ln 10{,}15 = 2{,}312\,535 + 0{,}004\,951 - 0{,}000\,012 = 2{,}317\,474$, was mit dem wahren Wert übereinstimmt.

Für $y = 2{,}317$ wird $k = -0{,}002\,2088$ und $x = 10{,}145\,194$, was in der letzten Ziffer um 1 zu groß ist. Beide Beispiele der inversen Interpolation sind mit der Rechenmaschine berechnet worden, um die Genauigkeit der quadratischen Interpolation in den vorliegenden Fällen vorzuführen. Es ist aber zu erkennen, daß der Rechenstab als Hilfsmittel für Nebenrechnungen auch bei im übrigen genaueren Methoden gute Dienste leisten kann.

Die pythagoreischen Skalen $\sqrt{1-X^2}\,..\,\sqrt{1-Y^2}$ und $\sqrt{X^2-1}\,..\,\sqrt{1+Y^2}$

Die beiden **pythagoreischen Skalen** enthalten im Verein mit der Hauptskala bildlich die **Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Einheitsdreiecken.**

Die **Kreisskala** $\sqrt{1-X^2}\,..\,\sqrt{1-Y^2}$ gibt in Verbindung mit der Hauptskala zu einer Koordinate des Einheitskreises die andere Koordinate an und daher zum Sinus des zugehörenden Winkels den Cosinus und umgekehrt. Die Koordinaten des Einheitskreises sind Katheten von Einheitsdreiecken mit den Hypotenusen = 1, d. h. von Hypotenusen-Einheitsdreiecken.

Die **Hyperbelskala** $\sqrt{X^2-1}\,..\,\sqrt{1+Y^2}$ gibt in Verbindung mit der Hauptskala zu einer Koordinate der Einheitshyperbel die andere Koordinate an und daher zum Tangens des zugehörenden Winkels den Secans und umgekehrt. Die Koordinaten der Einheitshyperbel sind eine Kathete und die Hypotenuse von Einheitsdreiecken mit der anderen Kathete = 1, d. h. von Katheten-Einheitsdreiecken.

Da die pythagoreischen Skalen wie auch die Skalen der transzendenten Funktionen auf einer oder auf beiden Seiten **abgebrochen** werden müssen, so können extreme Verhältnisse mit dem Rechenstab nicht in direkter Weise berechnet werden. In diesen Fällen zieht man die aus den betreffenden unendlichen Reihen gewonnenen **Näherungsformeln** heran. Für kleine Werte von x genügt meistens eine lineare oder eine quadratische Beziehung zwischen der unabhängigen und der abhängigen Variablen.

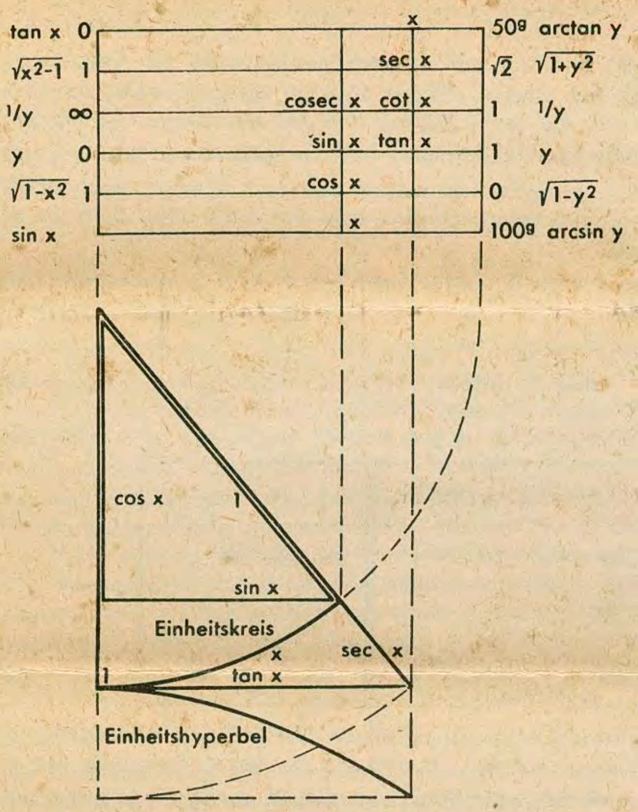
In manchen Fällen ragt der benötigte Bereich des verstellten Schiebers räumlich über den mit ihm gekoppelten Bereich der pythagoreischen (oder auch anderer) Skalen hinaus; **verdoppelte** oder **halbierte** Werte des gegebenen Dreiecks mit zu halbierenden bzw. zu verdoppelnden Ergebnissen führen dann meistens ohne Schieberumstellungen zum Ziele.

Die folgende Zusammenstellung zeigt die gegenseitigen Beziehungen zwischen den pythagoreischen Skalen und den Hauptskalen in der Schiebergrundstellung, wenn man die Ausgangsgröße auf einer der Skalen gleich z setzt. Der Wert dieser Zusammenhänge besteht nicht nur in der direkten Verwendbarkeit, sondern vor allem in der hohen Genauigkeit der Ergebnisse.

$\sqrt{X^2-1}$	$\sqrt{2-z^2}$	$\sqrt{1+1/z^2}$	$\sqrt{1+1/z}$	$\sqrt{1+z}$	z	$\sqrt{1+Y^2}$
$\sqrt{x}$	$1-z^2$	$1/z^2$	$1/z$	z	z^2-1	y^2
$1/\sqrt{x}$	$1/(1-z^2)$	z^2	z	$1/z$	$1/(z^2-1)$	$1/y^2$
$1/y$	$1/\sqrt{1-z^2}$	z	$\sqrt{z}$	$1/\sqrt{z}$	$1/\sqrt{z^2-1}$	$1/y$
$\sqrt{1-X^2}$	z	$\sqrt{1-1/z^2}$	$\sqrt{1-1/z}$	$\sqrt{1-z}$	$\sqrt{2-z^2}$	$\sqrt{1-Y^2}$

Die trigonometrischen und zyklometrischen Skalen sin X^g . . arc sin Y und X^g . . arc tan Y

Die beiden **trigonometrischen und zyklometrischen Skalen** enthalten in Verbindung mit der Hauptskala die **Winkelfunktionen und Winkel**, die in den rechtwinkligen Einheitsdreiecken unmittelbar veranschaulicht werden.



Rechtwinklige Einheitsdreiecke im Einheitskreis und an der Einheitshyperbel, mit gleichen Winkeln.
Die Skalen dieses Bildes sind nicht logarithmiert

Auf dem Rechenstab sind die **Winkelfunktionen** gegenüber den Winkeln insofern bevorzugt, als man die Funktionen zwecks Weiterrechnens auf die Hauptskala projizieren kann, während die Winkel nur abzulesen sind. Dies hat seine Berechtigung, weil selten nach Winkeln gefragt wird, häufig aber nach Auswirkungen für beliebige Winkel. Entsprechendes gilt auch für das Argument der hyperbolischen Funktionen.

Während in der Mathematik für die Winkel das Bogenmaß das natürliche Argument ist, erscheint der **Neugrad** bzw. der **rechte Winkel** als das geeignetste künstliche Argument für die Ausrechnungen. Das natürliche Argument der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen ist oft mit dem Faktor $\pi/2$, 2π oder π versehen, so daß sich der rechte Winkel oder ein ganzes Vielfaches unter Fortfall des π-Faktors von selbst als Einheit ergibt. Beim Mathema-Stab ist deshalb die Teilung der genannten Funktionen in Neugrad vorgesehen.

Die Skala **sin X^g . . 200 : π · arc sin Y** (abgekürzt ^{g}sin Y) hängt mit der Kreisskala eng zusammen. Infolge der gemeinsamen Hauptskala ist $Y = \sqrt{1-X^2} = \sin X^g$. Damit ergibt sich $\sqrt{1-Y^2} = \cos X^g$ und die Tatsache, daß der Läuferstrich Wertetripel der beiden Katheten des Hypotenusen-Einheitsdreiecks und eines zugehörenden Winkels anzeigt.

Die Skala **tan X^g . . 200 : π · arc tan Y** (abgekürzt ^{g}tan Y) hängt mit der Hyperbelskala eng zusammen. Infolge der gemeinsamen Hauptskala ist $Y = \sqrt{X^2-1} = \tan X^g$. Damit ergibt sich $\sqrt{1+Y^2} = \sec X^g$ und die Tatsache, daß der Läuferstrich Wertetripel der zweiten Kathete und der Hypotenuse des Katheten-Einheitsdreiecks und eines zugehörenden Winkels anzeigt.

Die **Kathete** a eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c und der anderen Kathete b findet man aus

$$a = \sqrt{c^2-b^2} = c\sqrt{1-(b/c)^2}.$$

Man stellt auf dem Mathema-Stab gemäß der zweiten Formel Proportionalität zwischen den Seiten des gegebenen Dreiecks und den Seiten des Hypotenusen-Einheitsdreiecks her. Hierzu bringt man $y = c$ an den Endstrich 1 der Skala Y, nötigenfalls an den Endstrich 0,1. Mit dem Läuferstrich auf $y = b$ ergibt sich auch $Y = b/c$, ferner $\sqrt{1-(b/c)^2}$ auf der Kreisskala und der Winkel β auf der sin..arcsin-Skala. Durch die Übertragung des Betrages $\sqrt{1-(b/c)^2}$ von der Kreisskala auf die Y-Skala mittels des Läuferstrichs findet man auf der y-Skala bei unveränderter Schieberstellung die gesuchte Kathete $\sqrt{c^2-b^2}$ und auf der sin..arcsin..Skala den Winkel α.
Im Schema ist der Rechenvorgang schrittweise dargestellt.

y	c	b	$\sqrt{c^2-b^2}$	y
Y	1	b/c	$\sqrt{1-(b/c)^2}$	Y
$\sqrt{1-X^2}$	0	$\sqrt{1-(b/c)^2}$		$\sqrt{1-Y^2}$
sin X^g	100	β	α	^{g}sin Y

Beispiele: $c = 6{,}78$; $b = 4{,}56$; $a = 5{,}02$; $\alpha = 53{,}09^g$; sin vers $40^g = 1 - \cos 40^g = 0{,}1910$

c	b	a	α
6,78	4,56	5,02	53,0g
15	6	13,75	73,8
15	1,5	14,925	93,6

sem $40^g = (1 - \cos 40^g)/2 = \sin^2 20^g = 0{,}0955$

Ausdrücke wie $\sqrt{d^2-c^2-b^2}$ berechnet man durch Wiederholung der Rechenschritte.

Beispiel: $\sqrt{987^2-654^2-321^2} = 666$.

Die **Hypotenuse** c eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b findet man aus

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+(b/a)^2}.$$

Es sei $a > b$. Man stellt auf dem Mathema-Stab gemäß der zweiten Formel Proportionalität zwischen den Seiten des gegebenen Dreiecks und den Seiten des Katheten-Einheitsdreiecks her. Hierzu bringt man $y = a$ an den Endstrich 1 der Y-Skala, nötigenfalls an den Endstrich 0,1. Mit dem Läuferstrich auf $y = b$ ergibt sich auch $Y = b/a$, ferner $\sqrt{1+(b/a)^2}$ auf der Hyperbelskala und der Winkel β auf der tan..arctan-Skala. Durch die Übertragung des Betrages $\sqrt{1+(b/a)^2}$ von der Hyperbelskala auf die Y-Skala mittels des Läuferstrichs findet man auf der y-Skala bei unveränderter Schieberstellung die gesuchte Hypotenuse $\sqrt{a^2+b^2}$. Im Schema ist der Rechenvorgang schrittweise dargestellt.

tan X^g	50		β		^{g}tan Y
$\sqrt{X^2-1}$	$\sqrt{2}$		$\sqrt{1+(b/a)^2}$		$\sqrt{1+Y^2}$
y	a	>	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	y
Y	1		b/a	$\sqrt{1+(b/a)^2}$	Y

Beispiele:

a	b	c	β
6,78	4,56	8,17	37,7g
15	6	16,16	24,2
15	1,5	15,075	6,35

Ausdrücke wie $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ berechnet man durch Wiederholung der Rechenschritte. Beispiel: $\sqrt{987^2+654^2+321^2} = 1227$

Da man mit der gleichen Läuferstellung **sin X^g und cos X^g** erhält, so kann man von dem einen Wert zum anderen übergehen entsprechend den Ausdrücken cos arc sin Y und sin arc cos Y, ohne erst den Winkel feststellen zu müssen. Ferner kann man jeden der beiden Werte, sofern er größer als $1/\sqrt{2}$ ist, auf der Kreisskala genauer als auf der Hauptskala erhalten, indem man $\sin X^g = \cos(100-X^g)$ bzw. $\cos X^g = \sin(100-X^g)$ setzt.

Da man mit der gleichen Läuferstellung **tan X^g und sec X^g** erhält, so kann man von dem einen Wert zum anderen übergehen entsprechend den Ausdrücken sec arc tan Y und tan arc sec Y, ohne erst den Winkel feststellen zu müssen. Ferner kann man sec X^g auf der Hyperbelskala genauer erhalten als aus cos X^g auf der Skala $^1/y$.

Die **Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen** mit einfachen, doppelten und halben Winkeln und die daraus zu gewinnenden algebraischen Funktionen sind auf Seite 30 zusammen mit den verwandten Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen tabellarisch dargestellt.

Die exponentiellen Stammfunktionen e^{X^g} und e^X und die logarithmischen Umkehrfunktionen ^{g}ln Y und ln Y

Die **Stammfunktion** e^{X^g} wird auf dem logarithmischen Rechenstab durch eine gleichmäßig geteilte Skala dargestellt. Sie ist daher für eine beliebige Erweiterung des Bereichs geeignet. Die zu den verschiedenen Dekaden der Hauptskala gehörenden Stufen der e^{X^g}-Skala unterscheiden sich nämlich nur durch ganze Vielfache von $200 : \pi \cdot \ln 10$ als **additive Konstante.**

n	200 : π · n ln 10	n	200 : π · n ln 10	n	200 : π · n ln 10
1	146,587 119g	4	586,348 476g	7	1026,109 834g
2	293,174 238g	5	732,935 595g	8	1172,696 953g
3	439,761 357g	6	879,522 715g	9	1319,284 072g

Um die additive Konstante wenigstens für die ersten 8 Stufen auf einen runden, zum Kopfrechnen geeigneten Wert, nämlich auf 140g zu bringen, ist der Läufer des Mathema-Stabes mit entsprechend **versetzten Marken** versehen; der Läuferrand ist danach beschriftet.

Die Stellenzahl des Ergebnisses von e^{x^g} im Bereiche der Hauptdekade der Y-Skala wird durch Multiplikation des Ablesewertes mit der bei der additiven Konstante angeschriebenen Zehnerpotenz erreicht.

$e^{0,5\pi} = e^{100^g} = 4,81$; $M^{10}_{x}(e^{x^g})$ SK 100^g / Y Sk $0,481 \cdot 10 = 4,81$

$e^{-0,5\pi} = e^{-100^g} = 0,208$; Gst: $M^{10}_{x}(e^{x^g})$ Sk 100^g / $^1/y$ Sk $2,08 \cdot 10^{-1} = 0,208$

$e^{3\pi} = e^{600^g} = 1,239 \cdot 10^4$; $M^{10^5}_{560}(e^{x^g})$ Sk 40^g / Y Sk $0,1239 \cdot 10^5$

$e^{-3\pi} = e^{-600^g} = 8,07 \cdot 10^{-5}$; Gst: $M^{10^5}_{560}(e^{x^g})$ Sk 40^g / $^1/y$ Sk $8,07 \cdot 10^{-5}$

$e^{10\pi} = e^{2000^g} = e^{1465,87 + 439,76 + 94,36} = 4,4 \cdot 10^{10+3}$

$M^{10}_{x}(e^{x^g})$ Sk 94,36 / Y Sk $0,44 \cdot 10 = 4,4$

$\frac{\sinh}{\cosh} 225^g = (e^{225} \mp e^{-225}) : 2 = 17,135 \mp 0,015 = {17,12 \atop 17,15}$

${}^g\tanh 0,99996 = -\frac{200}{\pi} \cdot \ln \sqrt{(1-0,99996) : (1+0,99996)} = -\frac{200}{\pi} \ln \sqrt{\frac{0,00004}{2}} = 344,5^g$

Gst: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ Sk 2 / $M^{4,4}_{10^3}(e^{x^g})$ Sk 1,01; $\frac{200}{\pi}$ $(4,4 + 1,01) = 344,5^g$

$e^{0,1\pi} \cdot \sin 40^g = e^{20^g} \cdot \sin 40^g = 0,805$

$M^{10}_{x}(e^{x^g})$ Sk 20^g / Y Sk 1,37; y Sk 1 / sin Sk 40^g // y Sk 1,37 / Y Sk 0,805

$e^{-0,1\pi} \cdot \sin 40^g = e^{-20^g} \cdot \sin 40^g = 0,429$

Gst: $M^{10}_{x}(e^{x^g})$ Sk 20^g / $^1/y$ Sk 0,73; y Sk 1 / sin Sk 40^g // y Sk 0,73 / Y Sk 0,429

amp $60^g = 2^g \tan e^{60^g} - 100^g = 2 \cdot 76,35^g - 100^g = 52,7^g$

Gst: $M^{10}_{x}(e^{x^g})$ Sk 60^g / Y Sk 2,566; $^1/y$ Sk 2,566 / tan Sk 23,65; $100^g - 23,65^g = 76,35^g$

(oder einfacher: tanh Sk 60^g / sin Sk $52,7^g$)

Die Skala für die **Stammfunktion** e^x unterscheidet sich von der Skala für die Funktion e^{x^g} durch das in natürlichen Zahlen ausgedrückte Argument.

Da die exponentiellen und die logarithmischen Funktionen von gleicher Wichtigkeit sind, ist der Mathema-Stab sowohl mit der Funktion e^X..ln Y als auch mit der anschließend besprochenen Funktion ln X..e^Y versehen. Infolgedessen kann man die einschlägigen Rechnungen immer direkt ausführen. Es ist aber gegebenenfalls zu bedenken, daß die **Ablesegenauigkeiten** der wechselseitigen Stamm- und Umkehrfunktionen verschieden sind. Mit zunehmendem Exponenten wächst die Ablesegenauigkeit der exponentiellen Stammfunktion e^X, während die der exponentiellen Umkehrfunktion e^Y abnimmt. Die beiden Ablesegenauigkeiten halten sich beim Exponenten 1 mit dem Ergebnis e = 2,718281828459 = $^1/0,3678794412$ die Waage. Entsprechendes gilt für die Ablesegenauigkeit der Logarithmen.

Die **additive Konstante** für die verschiedenen Stufen der e^X - Skala beträgt ein ganzes Vielfaches von ln 10 = $^1/M$ = 2,302585093 = $^1/0,434294482$.

n	n ln 10	n	n ln 10	n	n ln 10
1	2,302585093	4	9,210340372	7	16,118095651
2	4,605170186	5	11,512925465	8	18,420680744
3	6,907755279	6	13,815510558	9	20,723265837

Um die additive Konstante für mehrere Stufen auf den Wert 2,2 zu bringen, ist der Läufer des Mathema-Stabes mit entsprechenden **versetzten Marken** versehen; der Läuferrand an der vorderen Schmalseite ist danach beschriftet.

Beispiele:

$\ln\sqrt{1-0{,}83^2} = \ln 0{,}558 = -0{,}584$; Gst: $\sqrt{1-x^2}$ Sk 0,83 / Y Sk 0,558; $^1/y$ Sk 0,558 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk —0,584

$\ln\cos 40^g = \ln 0{,}808 = -0{,}212$; Gst: sin Sk 60^g / Y Sk 0,808; $^1/y$ Sk 0,808 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk —0,212

$\ln\sec 40^g = \ln\frac{1}{\cos 40^g} = \ln 1{,}238 = 0{,}212$; Gst: sin Sk 60^g / $^1/y$ Sk 1,238; Y Sk 1,238 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 0,212

$\ln\sinh 40^g = \ln 0{,}67 = -0{,}4$; Gst: sinh 40^g / Y Sk 0,67; $^1/y$ Sk 0,67 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk —0,4

$\ln\sqrt{1{,}04^2-1} = \ln 0{,}285 = -1{,}253$; Gst: $\sqrt{x^2-1}$ Sk 1,04 / Y Sk 0,285; $^1/y$ Sk 0,285 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk —1,253

$\ln\tan 30^g = \ln 0{,}51 = -0{,}674$; Gst: tan Sk 30^g / Y Sk 0,51; $^1/y$ Sk 0,51 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk —0,674

$\ln\tan 70^g = \ln\cot 30^g = \ln\frac{1}{0{,}51} = 0{,}674$; Gst: tan Sk 30^g / $^1/y$ Sk 1,96; Y Sk 1,96 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 0,674

$\ln\cosh 40^g = \ln 1{,}205 = 0{,}186$; Gst: 0,1 cosh Sk 40^g / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 0,186

$e^2 = 7{,}39$; M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 2 / Y Sk $0{,}739 \cdot 10$

$e^{-2} = 0{,}1353$; Gst: M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 2 / $^1/y$ Sk $1{,}353 \cdot 10^{-1}$

$e^4 = e^{2,2+1,8} = 54{,}6$; M $^{2,2}_{10^2}$ (e^x) Sk 1,8 / Y Sk $0{,}546 \cdot 10^2$

$e^{-4} = e^{-2,2-1,8} = 0{,}0183$; Gst: M $^{2,2}_{10^2}$ (e^x) Sk 1,8 / $^1/y$ Sk $1{,}83 \cdot 10^{-2}$

$e^{11} = e^{8,8+2,2} = 59900$; M $^{8,8}_{10^5}$ (e^x) Sk 1,8 / Y Sk $0{,}599 \cdot 10^5$

$e^{-11} = e^{-8,8-2,2} = 0{,}0000167$; Gst: M $^{8,8}_{10^5}$ / (e^x) Sk 1,8 / $^1/y$ Sk $1{,}67 \cdot 10^{-5}$

$e^{100} = e^{92,103+7,897} = 2{,}69 \cdot 10^{43}$; M $^{6,6}_{10^4}$ (e^x) Sk 1,297 / Y Sk $0{,}269 \cdot 10^4$

$\operatorname{ar\,sinh} 0{,}6 = \ln(0{,}6+\sqrt{1+0{,}6^2}) = \ln(0{,}6+1{,}166) = \ln 1{,}766 = 0{,}569$

Y Sk 0,6 / $\sqrt{1+Y^2}$ Sk 1,166; Y Sk (1,166 + 0,6) / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 0,569; (oder y Sk 0,6 / sinh Sk $36{,}25^g = 0{,}569$)

$\operatorname{ar\,tanh} 0{,}6 = \ln\sqrt{(1+0{,}6):(1-0{,}6)} = 0{,}693$

$\sqrt{x}$ Sk 1,6 / $\sqrt{x}$ Sk 0,4 // y Sk 1 / Y Sk 2; Y Sk 2 / M $^{x}_{10}$ (e^x) Sk 0,693 (oder Y Sk 0,6 / tanh Sk $44{,}1^g = 0{,}693$)

Die logarithmischen Stammfunktionen ± ln X und die exponentiellen Umkehrfunktionen $e^{\pm Y}$

Für die **logarithmischen Stammfunktionen und exponentiellen Umkehrfunktionen** besitzt der Mathema-Stab zwei dreistufige Gruppen von Skalen, $Y = \pm \ln X$ für positive und negative Logarithmen, $e^{\pm Y}$ für direkte und reziproke Potenzen von e.

Mit den logarithmischen Skalen erhält man nicht nur die zugrundegelegten natürlichen Logarithmen auf der Y-Skala, sondern auch die **Logarithmen zu einer beliebigen Basis a.** Hierzu stellt man einen Schieberendstrich dem Wert a auf der logarithmischen Skala gegenüber, denn es muß sein

$$^a\log a = 1.$$

Die Logarithmen zur Basis a unterscheiden sich von den natürlichen Logarithmen durch einen konstanten Faktor, den **Modul**

$$M_a = {}^1/\ln a.$$

Von Bedeutung ist der Modul des dekadischen oder **Briggs'schen Logarithmus** $M = 0{,}4343$.

Beispiele: $^{10}\log 2 = \lg 2 = 0{,}301$ $\qquad \lg 10 = x$.

Das **Potenzieren** einer Zahl a mit dem Exponenten m auf dem Rechenstab kann so erklärt werden, daß man auf der Y-Skala m ln a bildet und hierzu den Numerus auf der e^Y-Skala aufsucht, entsprechend der Beziehung

$$\ln a^m = m \ln a.$$

Statt dessen kann man aber auch den Numerus zu $m \cdot {}^a\log a$ von der y-Skala ausgehend bestimmen. Daß dies die Regel ist, wird dadurch offenbar, daß man die Y-Skala hier gar nicht benötigt und weder ln a noch m ln a abliest.

Für das **Radizieren** gilt das Vorstehende mit $^1/n = m$.

Die folgenden Schemas sind so angelegt, daß Schieberumstellungen nicht nötig werden.

—ln X	$^1/a$	$^1/a^m$	e^{-Y}
$^1/y$	m	1	$^1/y$
y	$^1/m$	1	y
ln X	a	a^m	e^Y

—ln X	$^1/a$	$1/a^{1/n}$	e^{-Y}
$^1/y$	$^1/n$	1	$^1/y$
y	n	1	y
ln X	a	$a^{1/n}$	e^Y

Beispiele:

$1{,}05^{20} = 2{,}653$; 10 ln Sk 1,05 / y Sk 1 // y Sk 2 / 0,1 ln Sk 2,653

$0{,}95^{20} = 0{,}3585$; -10 ln Sk 0,95 / y Sk 1 // y Sk 2 / -0,1 ln Sk 0,3585

$\sqrt[5]{0{,}5} = 0{,}8705$; —0,1 ln Sk 0,5 / y Sk 5 // y Sk 1 / —ln Sk 0,8705

$2345^{6,7} = 10^{6,7 \cdot \lg 2345} = 10^{6,7 \cdot 3,37} = 10^{22 + 0,58} = 3{,}8 \cdot 10^{22}$

y Sk 0,1 / 0,1 ln Sk 10 // 0,1 ln Sk 2345 / y Sk 3,37;

$6{,}7 \cdot 3{,}37 = 22{,}58$; y Sk 1 / 0,1 ln Sk 10 // y Sk 0,58 / 0,1 ln Sk 3,8

$\ln (246 \cdot 10^8) = \ln 246 + 8 \ln 10 = 5{,}51 + 18{,}42 = 23{,}93$

0,1 ln Sk 246 / Y Sk 5,51; 0,1 ln Sk 10 / y Sk 1 // y Sk 8 / Y Sk 18,42

$e^{15} = (e^{7,5})^2 = 1810^2 = 3{,}27 \cdot 10^6$; Y Sk 7,5 / 0,1 ln Sk 1810;

Y Sk 1810 / $\sqrt{x}$ Sk $3{,}27 \cdot 10^6$

$e^{\sin 40^g} = 1{,}8$; sin Sk 40^g / ln Sk 1,8

$(\ln 10)^2 = 5{,}3$; 0,1 ln Sk 10 / $\sqrt{x}$ Sk 5,3

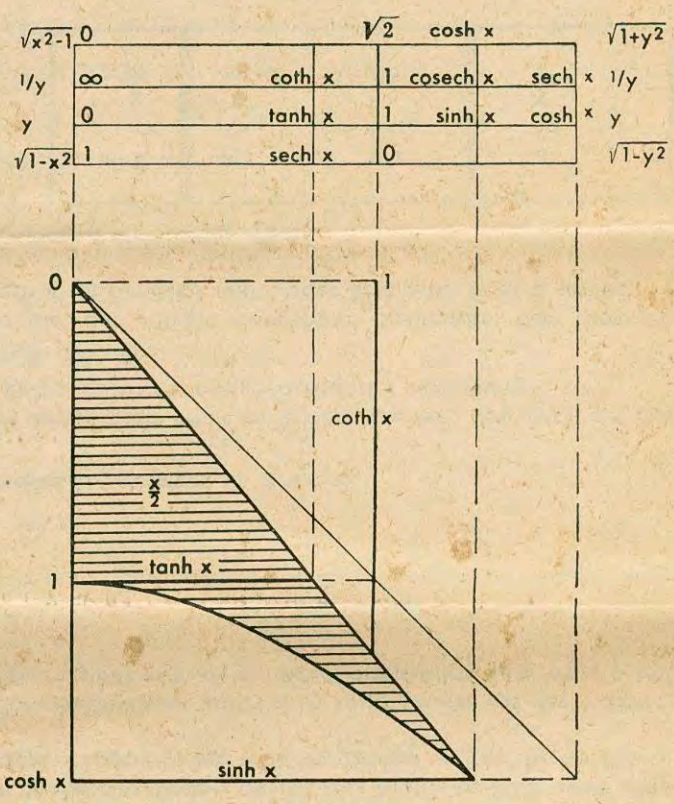
$\ln (\ln 10) = 0{,}835$; 0,1 ln Sk 10 / $M \frac{x}{10} (e^x)$ Sk 0,835

Die beiden Gruppen der logarithmischen Skalen weisen Zahlen auf, die einander **reziprok** sind. Die Angaben sind für Werte von $e > X > 1/e$ genauer ablesbar als auf der y-Skala und 1/y-Skala, und zwar um so mehr, je näher die Zahlen bei 1 liegen.

Beispiel: $1/1{,}01234 = 0{,}98781$.

Die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen

Die Skalen für die **Hyperbelfunktionen** sind auf der Rückseite des Schiebers aufgetragen. Wie bei den anderen Schieberskalen und wie die Bezeichnung der Veränderlichen mit x und y auch angibt, beziehen sich die Werte auf die y-Skala.



Hyperbelfunktionen

Die Skalen dieses Bildes sind nicht logarithmiert

Beispiele: $\sinh 0{,}6\, \pi/2 = \sinh 60^g = 1{,}088$; 0,1 sinh Sk 60^g / y Sk 1,088

$\tanh 0{,}4\, \pi/2 = \tanh 40^g = 0{,}557$; tanh Sk 40^g / Y Sk 0,557

$^g\sinh 0{,}2 = 12{,}65^g$; y Sk 0,2 / sinh Sk $12{,}65^g$

$\cosh 0{,}5 \frac{\pi}{2} = \cosh 50^g = 1{,}325$; 0,1 cosh Sk 50^g / y Sk 1,325

$\frac{200}{\pi} \operatorname{ar\,sinh} 2 = {}^g\sinh 2 = 91{,}9^g$; y Sk 2 / 0,1 sinh Sk $91{,}9^g$

$\ln \cosh 50^g = \ln 1{,}325 = 0{,}281$; Gst: 0,1 cosh Sk 50^g / $M \frac{x}{10} (e^x)$ Sk 0,281

Da $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ ist, so findet man die Werte von cosh x für kleine Argumente mit Hilfe der sinh-Grundstufenskala und der Hyperbelskala $\sqrt{1 + Y^2}$ genauer als mittels der cosh-Skala. In entsprechender Weise ergibt sich $\operatorname{sech} x = \sqrt{1 - \tanh^2 x}$ für kleine Werte von x mit erhöhter Genauigkeit auf der Kreisskala $\sqrt{1 - Y^2}$.

Beispiele: $\cosh 10^g = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = 1{,}0123$; $10^g = 0{,}1571$; Li. L Y Sk 0,1 / re. L $\sqrt{1 + Y^2}$ Sk 1,0123

$^g\cosh 1{,}0246 = 0{,}223 = 14{,}2^g$; re. L $\sqrt{x^2 - 1}$ Sk 1,0246 / li. L Y Sk $0{,}142 = 14{,}2^g$

$\operatorname{sech} 10^g = \sqrt{1 - \tanh^2 x} = 0{,}9876$; li. L Y Sk 0,1 / re. L $\sqrt{1 - Y^2}$ Sk 0,9876

$^g\operatorname{sech} 0{,}975 = 0{,}2225 = 14{,}3^g$; re. L $\sqrt{1 - x^2}$ Sk 0,975 / li. L Y Sk 0,143

Man könnte demnach die Beziehung $\cosh x = 1/\operatorname{sech} x$ dazu benutzen, nahe bei 1 liegende Zahlen in reziproke Zahlen zu verwandeln; die Zuhilfenahme der logarithmischen Skalen ± ln X gibt jedoch trotz größerer Einfachheit genauere Werte.

Bei der Ausrechnung zusammengesetzter Ausdrücke mit Hyperbelfunktionen beginnt man mit der **Einstellung der Hyperbelfunktion.**

Beispiele: $\sin 60^g \cdot \sinh 60^g = 0{,}881$; 0,1 sinh Sk 60^g / Y Sk 1 // sin Sk 60^g / y Sk 0,881

$\sin 60^g : \sinh 60^g = 0{,}743$; sin Sk 60^g / 0,1 sinh Sk 60^g // y Sk 0,1 / Y Sk 0,743

Für Werte x 224^g kann bei sinh und cosh das Glied $\frac{e^{-X}}{2}$ vernachlässigt werden. Es gilt dann: $\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{e^X}{2}$.

$\sin 330^g \cdot \sinh 330^g = -79{,}4$; $\sin 330^g = -\sin 70^g$

$M \frac{10^3}{280} (e^{x^g})$ Sk 50^g / y Sk 2 // y Sk 1 / Y Sk 89,2; y Sk 89,2 / Y Sk 1 // sin Sk 70^g / y Sk 79,4

$\sin 260^g : \sinh 260^g = -0{,}02725$; $\sin 260^g = -\sin 60^g$

y Sk 1 / sin Sk 60^g // y Sk 2 / Y Sk 1,618; y Sk 0,1 / Y Sk 1,618 // $M \frac{10^2}{140} (e^{x^g})$ Sk 120 / 1/y Sk 0,02725

Die **Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen** mit einfachen, doppelten und halben Argumenten und die daraus zu gewinnenden algebraischen Funktionen sind zusammen mit den verwandten Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen tabellarisch nachstehend dargestellt.

Beziehungen zwischen den $\frac{\text{trigonometrischen}}{\text{hyperbolischen}}$ Funktionen mit einfachem, mit doppeltem und mit halbem Argument

sin φ sinh φ	z	$\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$1/\sqrt{1/z^2 - 1}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp \sqrt{1 \mp z^2}}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp z}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp 1/\sqrt{1 \pm z^2}}{2}}$
cos φ cosh φ	$\sqrt{1 \mp z^2}$	z	$1/\sqrt{1 - z^2}$	$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 \mp z^2}}{2}}$	$\sqrt{\frac{1 + z}{2}}$	$\sqrt{\frac{1 + 1/\sqrt{1 \pm z^2}}{2}}$
tan φ tanh φ	$1/\sqrt{1/z^2 \mp 1}$	$\sqrt{\pm 1/z^2 + 1}$	z	$\frac{z}{1 + \sqrt{1 \mp z^2}} = \frac{\pm 1 \mp \sqrt{1 \mp z^2}}{z}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp z}{1 + z}}$	$\frac{\mp 1 \pm \sqrt{1 \pm z^2}}{z} = \frac{z}{1 + \sqrt{1 \pm z^2}}$
sin 2φ sinh 2φ	$2z\sqrt{1 \mp z^2}$	$2z\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$\frac{2z}{1 \pm z^2}$	z	$\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$1/\sqrt{1/z^2 - 1}$
cos 2φ cosh 2φ	$1 + 2z^2$	$2z^2 - 1$	$\frac{1 + z^2}{1 + z^2}$	$\sqrt{1 \mp z^2}$	z	$1/\sqrt{1 - z^2}$
tan 2φ tanh 2φ	$\frac{2z\sqrt{1 \mp z^2}}{1 \mp 2z^2}$	$\frac{2z\sqrt{\pm 1 \mp z^2}}{2z^2 - 1}$	$\frac{2z}{1 \mp z^2}$	$1/\sqrt{1/z^2 \mp 1}$	$\sqrt{\pm 1/z^2 \mp 1}$	z

Die oberen Vorzeichen in den vorstehenden Formeln gehören zu den trigonometrischen Funktionen, die unteren zu den hyperbolischen.
Man erhält mit dem einfachen, mit dem doppelten bzw. mit dem halben Argument die angegebenen Funktionen von z, wenn in der gleichen Spalte der Wert der Ausgangsfunktion für das einfache Argument gleich z ist; z kann von einem zusammengesetzten Ausdruck wie a/b oder $\sqrt{a/b}$ usw. herrühren.
Man erhält die Beziehung einer Funktion mit einfachem, mit doppeltem bzw. mit halbem Argument zur Ausgangsfunktion in der gleichen Spalte mit einfachem Argument, indem man z durch die Ausgangsfunktion ersetzt. Die Ausdrücke

lassen sich in leicht ersichtlicher Weise vereinfachen, wenn man nur auf das doppelte bzw. auf das halbe Argument als Ausgangsgröße Wert legt, nicht aber auf bestimmte Ausgangsfunktionen dieser Argumente.

Ein wichtiges Beispiel für die Anwendung vorstehender Beziehungen ist die **goniometrische Auflösung quadratischer Gleichungen.**

1. $x^2 \pm 2ax - b^2 = 0$.

Man setzt $b/a = \tan 2\varphi$ und findet $x_1 = \pm b \tan \varphi$, $x_2 = \mp b \cot \varphi$.

2. $x^2 \pm 2ax + b^2 = 0$ mit $b < a$.

Man setzt $b/a = \sin 2\varphi$ und findet $x_1 = \mp b \tan \varphi$, $x_2 = \mp b \cot \varphi$.

Beispiele: $x^2 + 234x - 5670 = 0$; $a = 117$; $b = 75{,}2$; $x_1 = 22{,}1$; $x_2 = -256{,}1$

Y Sk 75,2 / y Sk 1,17 // y Sk 1 / tan Sk 36,36g; $\varphi = 18{,}18$g

Y Sk 1 / y 75,2 // tan Sk 18,18g / y Sk 22,1; y Sk 1 / Y Sk 75,2 // tan Sk 18,18g / 1/y Sk 256,1

$x^2 + 234 + 5670 = 0$; $a = 117$; $b = 75{,}2$; $x_1 = -27{,}4$; $x_2 = -206{,}5$

Y Sk 75,2 / y Sk 1,17 // y Sk 1 / sin Sk 44,49; $\varphi = 22{,}2$g

y Sk 75,2 / Y Sk 1 // tan Sk 22,2g / y Sk 27,4; y Sk 1 / Y Sk 75,2 // tan Sk 22,2g / 1/y Sk 206,5

Differentialquotienten und unbestimmte Integrale der Elementarfunktionen des Mathema-Stabes

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
mx^{m-1}	x^m	$x^{m+1}/(m+1) + C$
$-x/\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1-x^2}$	$0{,}5\,x\sqrt{1-x^2} + 0{,}5 \operatorname{arcsin} x + C$
$x/\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$	$0{,}5\,x\sqrt{1+x^2} + 0{,}5 \operatorname{arsinh} x + C$
$x/\sqrt{x^2-1}$	$\sqrt{x^2-1}$	$0{,}5\,x\sqrt{x^2-1} - 0{,}5 \operatorname{arcosh} x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$1/x$	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$-\operatorname{cosec}^2 x$	$\cot x$	$\ln \sin x + C$
$\sin x/\cos^2 x$	$\sec x$	$\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C = \ln \tan(\pi/4 + x/2) + C = \operatorname{ar\,amp} x + C$
$-\cos x/\sin^2 x$	$\operatorname{cosec} x$	$-\ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} + C$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$
$-1/(1+x^2)$	$\operatorname{arccot} x$	$x \operatorname{arccot} x + \ln \sqrt{1+x^2} + C$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x$	$\ln \cosh x + C$
$-\operatorname{cosech}^2 x$	$\coth x$	$\ln \cosh x + C$
$-\sinh x/\cosh^2 x$	$\operatorname{sech} x$	$2 \arctan e^x + C = \operatorname{amp} x + \pi/2 + C$
$-\cosh x/\sinh^2 x$	$\operatorname{cosech} x$	$-\ln \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x + 1}} + C$

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$1/\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{arsinh} x$	$x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + C$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\operatorname{arcosh} x$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$
$1/(1-x^2)$	$\operatorname{artanh} x$	$x \operatorname{artanh} x + \ln \sqrt{1-x^2} + C$
$1/(1-x^2)$	$\operatorname{arcoth} x$	$x \operatorname{arcoth} x + \ln \sqrt{x^2-1} + C$

Potenzreihen der reellen und der komplexen Elementarfunktionen ($z = x + iy$)

$$\sqrt{1+z} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{0{,}5}{m} z^m = 1 + z/2 - z^2/8 + z^3/16 - z^4/25{,}6 + z^5/36{,}57143 - z^6/48{,}76190 + \ldots \qquad |z| < 1$$

$$\sqrt{z \pm 1} = \sqrt{z} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{0{,}5}{m} /z^m = \sqrt{z}\,(1 \pm 1/2z - 1/8z^2 \pm 1/16z^3 - 1/25{,}6z^4 \pm 1/36{,}57143z^5 - \ldots) \qquad |z| > 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24 + z^5/120 + z^6/720 + z^7/5040 + z^8/40320 + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + z^5/5 - z^6/6 + z^7/7 - z^8/8 + z^9/9 - z^{10}/10 + \ldots \qquad |z| < 1$$

$$\begin{matrix}\sin z\\ \sinh z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n z^{2n+1}/(2n+1)! = z \mp z^3/6 + z^5/120 \mp z^7/5040 + z^9/362880 \mp z^{11}/39\,916880 + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\begin{matrix}\cos z\\ \cosh z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n z^{2n}/(2n)! = 1 \mp z^2/2 + z^4/24 \mp z^6/720 + z^8/40320 \mp z^{10}/3\,628800 \mp z^{12}/\,479\,001\,600 \mp \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\begin{matrix}\tan z\\ \tanh z\end{matrix} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n} z^{2n-1}/(2n)! = z \pm z^3/3 + z^5/7{,}5 \pm z^7/18{,}52941 + z^9/45{,}72581 \pm z^{11}/112{,}82562 + \ldots \qquad |z| < \pi/2$$

$$\begin{matrix}\cot z\\ \coth z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n 2^{2n} B_{2n} z^{2n-1}/(2n)! = 1/z \mp z/3 - z^3/45 \mp z^5/472{,}5 - z^7/4725 \mp z^9/46777{,}5 - z^{11}/462020{,}9 \mp \ldots \qquad |z| < \pi$$

$$\begin{matrix}\sec z\\ \operatorname{sech} z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n E_{2n}\, z^{2n}/(2n)! = 1 \pm z^2/2 + z^4/4{,}8 \pm z^6/11{,}80328 + z^8/29{,}11191 \pm z^{10}/71{,}82756 + \,.\,. \qquad |z| < \pi/2$$

$$\begin{matrix}\operatorname{cosec} z\\ \operatorname{cosech} z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n (2^{2n} - 2)\, B_{2n}\, z^{2n-1}/(2n)! = 1/z \pm z/6 + z^3/51{,}42857 \pm z^5/487{,}74193 + z^7/4762{,}20472 \pm \,.\,. \qquad |z| < \pi$$

$$\begin{matrix}\arcsin z\\ \operatorname{arsinh} z\end{matrix} = z + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n (2n-1)!!\, z^{2n+1}/(2n+1)\,(2n)!! = z \pm z^3/6 + z^5/13{,}33333 \pm z^7/22{,}4 + z^9/32{,}91429 \pm z^{11}/44{,}69841 + \,.\,. \qquad |z| < 1$$

$$\arccos z = \pi/2 - \arcsin z$$

$$\operatorname{arcosh} z = \ln 2z - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!!/(n \cdot 2^{2n+1} n!\, z^{2n}) = \ln 2z - 1/4z^2 - 1/10{,}66667z^4 - 1/19{,}2z^6 - 1/29{,}25714z^8 - \,.\,. \qquad |z| > 1$$

$$\begin{matrix}\arctan z\\ \operatorname{artanh} z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n z^{2n+1}/(2n+1) = z \mp z^3/3 + z^5/5 \mp z^7/7 + z^9/9 \mp z^{11}/11 + z^{13}/13 \mp z^{15}/15 \,.\,. \qquad |z| < 1$$

$\operatorname{arccot} z = \arctan {}^1/z$
$\operatorname{arcoth} z = \operatorname{artanh} {}^1/z$

$\operatorname{arcsec} z = \arccos {}^1/z$
$\operatorname{arsech} z = \operatorname{arcosh} {}^1/z$

$\operatorname{arccosec} z = \arcsin {}^1/z$
$\operatorname{arcosech} z = \operatorname{arsinh} {}^1/z$

$(2n)!! = 2 . 4 . 6 \ldots 2n$
$(2n-1)!! = 1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)$

Die Beschränkung auf die ersten Glieder der Potenzreihen ergeben Näherungsformeln für die Funktionen bei kleinen bzw. großen Argumenten.

Komplexe Funktionen, konforme Abbildungen und ebene orthogonale Koordinatensysteme

$z = x + iy$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arg z = \arctan y/x \pm 2\pi m$

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r\, e^{i\varphi} = r\, i^{2\varphi/\pi}$ (Euler)

$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

$\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$

$\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$

$\sin ix = i \sinh x$

$\cos ix = \cosh x$

$\tan ix = i \tanh x$

$\cot ix = -i \coth x$

$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$$\tan z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

$$\cot z = \frac{\sin 2x - i \sinh 2y}{-\cos 2x + \cosh 2y}$$

$x = |z| \cos\varphi$

$y = |z| \sin\varphi$

$m =$ ganze Zahl

$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} = r^n i^{2n\varphi/\pi}$ (Moivre)

$\ln z = \ln |z| + i\varphi$

$\operatorname{Ln} z = (\ln z)_{m=0}$

$\sinh ix = i \sin x$

$\cosh ix = \cos x$

$\tanh ix = i \tan x$

$\coth ix = -i \cot x$

$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$\tanh z = \frac{\sinh 2x + i \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

$$\coth z = \frac{\sinh 2x - i \sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$$

$$\operatorname{arcsin} iz = i \operatorname{arsinh} z = i \ln (z + \sqrt{1+z^2})$$
$$\operatorname{arccos} iz = -i \operatorname{arcosh} iz = \pm i \ln (z + \sqrt{1+z^2}) + \pi/2$$
$$\operatorname{arctan} iz = i \operatorname{artanh} z = i \ln \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$
$$\operatorname{arccot} iz = -i \operatorname{arcoth} z = -i \ln \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$$

$$\operatorname{arcsin} z = -i \operatorname{arsinh} iz = -i \ln (iz + \sqrt{1-z^2})$$
$$\operatorname{arccos} z = -i \operatorname{arcosh} z = \pm i \ln (z + i \sqrt{1-z^2})$$
$$\operatorname{arctan} z = -i \operatorname{artanh} iz = -i \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$
$$\operatorname{arccot} z = i \operatorname{arcoth} iz = -i \ln \sqrt{\frac{iz-1}{iz+1}}$$

Für eine **analytische Funktion** $Z = f(z) = X(x, y) + iY(x, y)$ gelten die **Cauchy-Riemann**sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

und die **Laplace**sche Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Eine analytische Funktion $Z = f(z)$ vermittelt zu einer Kurve der z-Ebene eine **konforme Abbildung** in der Z-Ebene und umgekehrt.

$X(x, y)$ und $Y(x, y)$ sind harmonische Funktionen.

Die konforme Abbildung eines orthogonalen Koordinatennetzes ergibt wieder ein orthogonales Koordinatennetz.

Parabolische Koordinaten

$Z = z^2$ $\qquad$ $z = \sqrt{Z}$

Die Z-Ebene hat zwei **Riemannsche Flächen** mit den **Verzweigungspunkten** $Z = O$ und $Z = \infty$; in diesen **singulären Punkten** ist $f'(Z) = O$ oder $= \infty$.

$X + iY = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\qquad$ $x + iy = \sqrt{(R + X)/2} + i \sqrt{(R - X)/2}$

$Y_1 = 2y \sqrt{y^2 + X}$, konfokale Parabeln für $y = c$. $\qquad$ $y_1 = Y/2x$, gleichseitige Hyperbeln für $Y = c$.

$Y_2 = 2x \sqrt{x^2 - X}$, konfokale Parabeln für $x = c$. $\qquad$ $y_2 = \sqrt{x^2 - X}$, gleichseitige Hyperbeln für $X = c$.

$Re^{i\varphi} = r^2 e^{2i\varphi}$, Polarkoordinaten mit verdoppeltem Argument. $\qquad$ $re^{i\varphi} = \sqrt{R}\, e^{\psi/2}$, Polarkoordinaten mit halbiertem Argument.

Polarkoordinaten

$Z = e^z$ $\qquad$ $z = \ln Z$

Den 4 Parallelstreifen von der Breite $\pi/2$ für $y = O$ bis $y = 2\pi$ der z-Ebene entsprechen die 4 Quadranten der Z-Ebene, die unendlich viele Riemannsche Flächen hat.

$X + iY = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$ $\qquad$ $x + iy = \ln R + i\varphi$

$Y_1 = X \tan y$, Geraden durch den Nullpunkt für $y = c$. $\qquad$ $y_1 = \operatorname{arcsin} Ye^{-X} \pm 2\pi m$

$Y_2 = \sqrt{e^{2x} - X^2}$, Kreise um den Nullpunkt für $x = c$. $\qquad$ $y_2 = \operatorname{arccos} Xe^{-x} \pm 2\pi m$

$Re^{i\psi} = e^x \cdot e^{iy}$ $\qquad$ $r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \ln R + i\psi$

$R = e^x$ $\qquad$ $r = \sqrt{(\ln R)^2 + \psi^2}$

$\psi = y$ $\qquad$ $\varphi = \operatorname{arccos}((\ln R)/r)$

Transformation durch reziproke Radien, Inversion

$Z = 1/z$ $\qquad$ $z = 1/Z$

$X + iY = x/r^2 - iy/r^2$

$Y_1 = -1/2y + \sqrt{1/4y^2 - X^2}$, Kreisbüschel für $y = c$, die reelle Achse berührend; **Dipol.**

$Y_2 = +\sqrt{X/x - X^2}$, Kreisbüschel für $x = c$, die imaginäre Achse berührend; **Dipol.**

$Re^{i\psi} = 1/re^{i\varphi}$

$R = 1/r$, Spiegelung am Einheitskreis.

$\psi = -\varphi$, Spiegelung an der reellen Achse.

Elliptische Koordinaten

Konfokale Ellipsen und konfokale Hyperbeln mit den Brennpunkten in $Z = +1$ bzw. $Z = \pm i$.

$Z = \sin z;$	$X^2/\cosh^2 y + Y^2/\sinh^2 y = 1;$	$X^2/\sin^2 x - Y^2/\cos^2 x = 1.$
$Z = \cos z;$	$X^2/\cosh^2 y + Y^2/\sinh^2 y = 1;$	$X^2/\cos^2 x - Y^2/\sin^2 x = 1.$
$Z = \sinh z;$	$-X^2/\cos^2 y + Y^2/\sin^2 y = 1;$	$X^2/\sinh^2 x + Y^2/\cosh^2 x = 1.$
$Z = \cosh z;$	$X^2/\cos^2 y - Y^2/\sin^2 y = 1;$	$X^2/\cosh^2 x + Y^2/\sinh^2 x = 1.$

Die Bilder der Koordinaten für $Z = \sin z$, $\cos z$ und $\cosh z$ stimmen miteinander überein (Brennpunkte in $Z = +1$), die der Koordinaten für $Z = \sinh z$ sind hiergegen um ∟ gedreht.

Überlagerung des kartesischen und des reziproken Netzes, Dipol im geraden Strom

$Z = z + 1/z;\ iZ = iz - 1/iz$ $\qquad z = 0{,}5\ Z \pm \sqrt{0{,}25\ Z^2 - 1}$

$$X + iY = x + x/r^2 + i\,(y - y/r^2)$$
$$= (r + 1/r)\cos\varphi + i\,(r - 1/r)\sin\varphi$$

Die kartesischen Koordinaten der z-Ebene ergeben in der Z-Ebene das Bild der Strömung um den Einheitskreis (Strömungslinien und Äquipotentiallinien), ebenso das Bild der Strömung im Einheitskreis.

Der Einheitskreis der z-Ebene geht in die Gerade von $X = -2$ bis $X = +2$ der Z-Ebene über.

Die anderen Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene ergeben konfokale Ellipsen in der Z-Ebene mit den Brennpunkten in $X = \pm 2$, während aus den Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene konfokale Hyperbeln in der Z-Ebene mit den genannten Brennpunkten werden.

Kreise durch die Punkte $z = +1$ gehen in Kreisbogen der Z-Ebene über.

Kreise durch den Punkt $z = -1$ mit dem Punkt $z = +1$ in seinem Innern gehen in Joukowski-Tragflügelprofile über.

Quelle und Senke gleicher Stärke, Bipolarkoordinaten

$Z = \tanh z/2$ $\qquad z = \ln(Z+1) - \ln(Z-1) = \ln\dfrac{Z+1}{Z-1}$

$Z = \coth z/2$ $\qquad z = \ln(1+Z) - \ln(1-Z) = \ln\dfrac{1+Z}{1-Z}$

$R_1 = |\operatorname{cosec} y|$, Kreisbüschel für $y = c$ um $X = 0$, $Y = +\cot y$ durch die Pole $X = +1$.

$R_2 = |\operatorname{cosech} x|$, apollonische Kreisbündel für $x = c$ um $X = +\coth x$, $Y = 0$.

$Z = \tan z/2$ $\qquad z = -i\ln(1+iZ) + i\ln(1-iZ) = -i\ln\dfrac{1+iZ}{1-iZ}$

$Z = \cot z/2$ $\qquad z = -i\ln(iZ-1) + i\ln(iZ+1) = i\ln\dfrac{iZ+1}{iZ-1}$

$R_1 = |\operatorname{cosech} y|$, apollonische Kreisbündel für $y = c$ um $X = 0$, $Y = \pm\coth y$.

$R_2 = |\operatorname{cosec} x|$, Kreisbüschel für $x = c$ um $X = +\cot y$, $Y = 0$ durch die Pole $Y = \pm 1$.

Zwei Quellen oder Senken gleicher Stärke

$Z = \sqrt{e^z + 1}$

$$z = \ln(Z-1) + \ln(Z+1) = \ln(Z^2-1)$$
$$x = 0{,}5\ \ln(R^4 - 2\,R^2\cos 2\psi + 1)$$
$$y = \arctan\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi - 1/R^2}$$

Die Parallelen zur reellen Achse in der z-Ebene werden zu Hyperbeln in der Z-Ebene; sie gehen durch die Pole $X = \pm 1$, ihre Asymptoten durch den Nullpunkt.

Die Parallelen zur imaginären Achse in der z-Ebene werden zu konfokalen **Cassini**-Kurven in der Z-Ebene mit den Brennpunkten in $X = \pm 1$; insbesondere geht die imaginäre Achse der z-Ebene in die **Lemniskate** der Z-Ebene über gemäß der Gleichung $R = \sqrt{2\cos 2\psi}$.